ФИЗИКА В НГУ

Г. В. Меледин, В. С. Черкасский

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ

Часть II

Электродинамика частиц и волн

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Физический факультет
Кафедра общей физики

Г. В. Меледин, В. С. Черкасский

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ЗАДАЧАХ

Часть II

Электродинамика частиц и волн
Учебное пособие

Новосибирск
2005

ББК В 313я 73-4
УДК 537+338
М 473
Меледин Г. В., Черкасский В. С. Электродинамика в задачах. Электродинамика частиц и волн: Учеб. пособие: В 2 ч./ Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2005. Ч. 2. 221с.

В учебном пособии содержатся задачи, предлагавшиеся студентам физического факультета НГУ на семинарах, в заданиях для самостоятельной работы, а также на письменных курсовых контрольных и в экзаменационных работах. Кроме того, включено некоторое количество задач, имеющихся в учебной литературе, прежде всего в известном пособии В. В. Батыгина, И. Н. Топтыгина «Сборник задач по электродинамике».

В отличие от первой части, вторая часть посвящена электромагнитным волнам, их излучению и распространению, когерентной оптике и релятивистскому описанию электромагнитных явлений. Всюду используется Гауссова система единиц.

Учебное пособие предназначено, прежде всего, для студентов-физиков и информатиков НГУ и преподавателей, ведущих соответствующие семинарские занятия. Задачник соответствует годовому курсу электродинамики (2-я часть охватывает материал весеннего семестра второго курса).

Рекомендовано редакционно-издательским отделом НГУ для специальности 2016.

© Новосибирский государственный университет, 2005

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ **5**

ВВЕДЕНИЕ **8**

Произвольные ортогональные координаты 8
Цилиндрические координаты 9
Сферические координаты 10
Полезные формулы 11
Система уравнений Максвелла 12

1. КИНЕМАТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН **14**

1.1. Кинематика волны 17
1.2. Граничные условия. Формулы Френеля 19
1.3. Геометрическая оптика 22
1.4. Рефракция 24
1.5. Решение типичных задач 25

2. ВОЛНЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ **57**

2.1. Фурье-разложение 60
2.2. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорости. Дисперсия 61
2.3. Соотношение неопределенностей 63
2.4. Волноводы и резонаторы 64
2.5. Решение типичных задач 66

3. КОГЕРЕНТНОСТЬ, ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. ДИФРАКЦИЯ **94**

3.1. Временная и пространственная когерентность. Видность. Степень когерентности. 99
3.2. Интерференция. Линии равного наклона и равной толщины. Интерферометры 105
3.3. Зоны Френеля. Дифракция Френеля 109
3.4. Дифракция Фраунгофера. Дифракционные решетки 113

3.5. Фурье-оптика. Голография 119
3.6. Решение типичных задач 124

4. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ 139
4.1. Распределение дипольного излучения.Ближняя и волновая зоны. Спектр 143
4.2. Оценки мультипольного излучения. Антенны 149
4.3. Рассеяние волн. Давление света 153
4.4. Решение типичных задач 157

5. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ 166
5.1. Преобразование полей. Инварианты поля 170
5.2. Излучение релятивистской частицы. Синхротронное излучение 174
5.3. Решение типичных задач 181

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ 186

1. КИНЕМАТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН 186

2. ВОЛНЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ 190

3. КОГЕРЕНТНОСТЬ, ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. ДИФРАКЦИЯ 195

4. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ 207

5. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ 215

Библиографический список 222

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий задачник задуман как пособие для обучения электродинамике студентов-физиков НГУ. За многие годы коллективом физиков, преподающих электродинамику на физическом факультете НГУ, был отобран в рамках программы круг тем, последовательность изучения, необходимый минимум обязательных задач. Была отработана также система занятий и контроля за усвоением материала. В нее вошли как традиционные формы — семинарские занятия, контрольная работа, общая для всего курса, так и задания с задачами, которые принимаются у каждого студента; экзамен, разбитый на два этапа: письменный и устный. Оценка, выставляемая в сессию, учитывает кроме устного ответа еще и результат письменной экзаменационной работы, выполняемой за день-два до устного экзамена, и отметку за работу на семинаре. Последняя оценивает сдачу заданий, активность на семинарах, результат курсовой письменной работы. Такой подход к проверке знаний позволяет в значительной мере избежать элемента случайности на экзамене, требует от студента регулярных занятий по всему курсу в течение семестра. Заметим, что на всех этапах проверки, кроме устного экзамена, студенту разрешается использовать любые учебные пособия. Это, естественно, предъявляет определенные требования к предлагаемым задачам: они должны быть не шаблонными, в достаточной мере оригинальными (преподаватели — научные сотрудники институтов СО АН СССР, так что большинство оригинальных задач возникло в результате конкретной научной деятельности). Вместе с тем в задачник включено большое количество типовых «обязательных» задач, широко распространённых в учебной литературе.

При проверке задач на всех этапах обращается внимание на следующие факторы: 1) понимание физической сущности задачи, области применимости решения; 2) рациональное использование математического аппарата, отыскание наилучшего из путей к решению; 3) по-

лучение как точного результата, так и в необходимом случае оценки; 4) умение довести решение до конца, до числа, грамотно и разумно использовать нужную систему единиц.

По поводу характера отбора задач, связанного с программой, необходимо отметить следующее. При изучении электродинамики в НГУ не предусматривается разделение курса на общую и теоретическую физику. Единый подход полезен, но, однако, обучение электродинамике на младших курсах требует при этом значительного облегчения математического аппарата, порой введения и использования некоторых математических приемов и разделов до их изучения в курсе математики. На этом пути, к сожалению, неизбежны и некоторые потери.

Еще одной особенностью данного курса является почти полный отказ от детальных вопросов электродинамики в средах. Это связано с тем, что соответствующие темы рассматриваются позже в соответствующих курсах и спецкурсах с учетом освоения проблем квантовой механики и статистической физики.

Данное пособие представляет собой переработанное и дополненное пособие Г. В. Меледина, Ю. И. Эйдельмана , Г. В. Рослякова «Задачи по электродинамике частиц и волн», в которое включены задачи из пособия Т. А. Ждановой , Г. В. Меледина «Задачи по электродинамике с решениями», вызвавшего большой интерес у студентов и преподавателей. Исправлено заметное число описок, ошибок, опечаток.

Авторы выражают глубокую благодарность за критическое внимание лекторам курса «Электродинамика» профессорам И. А. Котельникову, Б. А. Князеву, Б. А. Луговцову, В. И. Яковлеву, а также выражают свою признательность А. Г. Погосову, обнаружившему и исправившему большое число ошибок и опечаток в ответах; благодарят О. Г. Батеневу за помощь в оформлении рукописи. Большое спасибо всем, оказавшим помощь и содействие в создании этой книги.

Ниже дана таблица, в которой представлен перевод электрических и магнитных величин из системы Си в Гауссову систему.

Наименование	**СИ**	**Гауссова система**
Длина ℓ	1 м (метр)	10^2см
Масса m	1 кг (килограмм)	10^3г
Время t	1 с (секунда)	1 с
Сила F	1 Н (Ньютон)	10^5дин
Энергия $\mathcal{E}, W$	1 Дж (Джоуль)	10^7эрг
Давление p	1 Па (Паскаль)	10 дин/см^2
Сила тока J	1 А (Ампер)	$3 \cdot 10^9$см$^{3/2}$г$^{1/2}$/с^2
Электрический заряд e, q	1 Кл (Кулон)	$3 \cdot 10^9$ см$^{3/2}$г$^{1/2}$/с
Напряженность электрического поля E	1 В/м (Вольт на метр)	$\frac{1}{3}10^{-4}$г$^{1/2}$/(см$^{1/2}$с)
Потенциал φ	1 В (Вольт)	$\frac{1}{3}10^{-2}$см$^{1/2}$г$^{1/2}$/с
Емкость C	1 Ф (Фарада)	$9 \cdot 10^{11}$см
Сопротивление R	1 Ом (Ом)	$\frac{1}{9}10^{-11}$с/см
Напряженность магнитного поля H	1 А/м (Ампер на метр)	$4\pi \cdot 10^{-3}$Э (Эрстед)
Магнитная индукция B	1 Т (Тесла)	10^4Гс (Гаусс)
Магнитный поток Φ	1 Вб (Вебер)	10^8Мкс (Максвелл)
Индуктивность L	1 Г (Генри)	10^9см

Список опечаток, замеченных в 1-й части

Место	Опечатка	Правильно
Стр. 9. В таблице 3-я строка снизу	$4 \cdot 10^{-3}$ Э	$4\pi \cdot 10^{-3}$ Э
Стр. 12. 4-я строка снизу	$\mathrm{rot}_\theta \vec{A} = \ldots$	$\mathrm{rot}_\theta \vec{A} = \frac{1}{r \sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial \alpha}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha)$
Стр. 74.	$\vec{E}_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\vec{E}_0$	$\vec{E}_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}\vec{E}_0$
Стр. 106. 9-я строка снизу	$E/x = d$	$E\vert_{x=d}$
Стр. 214. 5-я строка сверху	$A_z = Hr\sin\theta/2$	$A_\alpha = Hr\sin\theta/2$
Стр. 220. 2-я строка снизу	$F = -\frac{\omega\pi J_0 \sin\theta}{c^2 R^2}$	$F = -\frac{Q\omega\pi J_0 \sin\theta}{c^2 R^2}$

ВВЕДЕНИЕ

Произвольные ортогональные координаты

В любых ортогональных координатах (q_1, q_2, q_3) квадрат элемента дуги равен $dl^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2$, где h_1, h_2, h_3 — коэффициенты Ламе. Элемент объема $dV = h_1 h_2 h_3 dq_1 dq_2 dq_3$. *Линии* произвольного *векторного поля* $\vec{A}(q_1, q_2, q_3)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{h_1 dq_1}{A_{q_1}} = \frac{h_2 dq_2}{A_{q_2}} = \frac{h_3 dq_3}{A_{q_3}}.$$

Градиент скалярной функции

$$\operatorname{grad}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы, касательные к координатным линиям в данной точке (q_1, q_2, q_3). *Дивергенция* вектора $\vec{A}$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}\right) =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2 h_3 A_{q_1}) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_3 h_1 A_{q_2}) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1 h_2 A_{q_3})\right].$$

Ротор вектора $\vec{A}$

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \left[\vec{\nabla}\times\vec{A}\right] =$$

$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\vec{e}_1 & h_2\vec{e}_2 & h_3\vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_{q_1} & h_2 A_{q_2} & h_3 A_{q_3} \end{vmatrix}.$$

Оператор Лапласа (лапласиан)

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 =$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_3 h_1}{h_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right].$$

Цилиндрические координаты

В *цилиндрических координатах* $(q_1 = R, q_2 = \alpha, q_3 = z)$ $h_1 = 1$, $h_2 = R, h_3 = 1,\ dl^2 = dR^2 + R^2 d\alpha^2 + dz^2,\ dV = RdRd\alpha dz.$

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\vec{A}$

$$\frac{dR}{A_R} = \frac{Rd\alpha}{A_\alpha} = \frac{dz}{A_z}.$$

Градиент скалярной функции $\varphi(R, \alpha, z)$

$$\operatorname{grad}_R \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial R};\ \operatorname{grad}_\alpha \varphi = \frac{1}{R}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha};\ \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Дивергенция вектора $\vec{A}(R, \alpha, z)$

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_R) + \frac{1}{R}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Компоненты *ротора* вектора $\vec{A}(R, \alpha, z)$ имеют вид

$$\operatorname{rot}_R \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}, \operatorname{rot}_\alpha \vec{A} = \frac{\partial A_R}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial R},$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{A} = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(RA_\alpha) - \frac{1}{R}\frac{\partial A_R}{\partial \alpha}.$$

Оператор Лапласа

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R\frac{\partial}{\partial R}\right) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Сферические координаты

В *сферических координатах* $(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \alpha)$ $h_1 = 1$, $h_2 = r, h_3 = r\sin\theta$, $dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\alpha^2$, $dV = r^2 dr\sin\theta d\theta d\alpha = r^2 dr d\Omega$, где $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\alpha$ — телесный угол.

Дифференциальные уравнения линий векторного поля $\vec{A}(r,\theta,\alpha)$

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{rd\theta}{A_\theta} = \frac{r\sin\theta d\alpha}{A_\alpha}.$$

Дивергенция вектора $\vec{A}(r,\theta,\alpha)$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial\alpha}.$$

Градиент скалярной функции $\varphi(r,\theta,\alpha)$

$$\operatorname{grad}_r\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r},\ \operatorname{grad}_\theta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\ \operatorname{grad}_\alpha\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}.$$

Компоненты *ротора* вектора $\vec{A}(r,\theta,\alpha)$ имеют вид

$$\operatorname{rot}_r\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\alpha) - \frac{\partial A_\theta}{\partial\alpha}\right],$$

$$\operatorname{rot}_\theta\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\alpha}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha),$$

$$\operatorname{rot}_\alpha\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta}.$$

Оператор Лапласа

$$\triangle = \vec{\nabla}^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}.$$

Полезные формулы

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}(\psi) + \psi \operatorname{grad}(\varphi);$$

$$\operatorname{div}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{grad} \varphi;$$

$$\operatorname{rot}(\varphi\vec{A}) = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} + \operatorname{grad} \varphi \times \vec{A};$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0;$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A} = 0;$$

$$\operatorname{div} \left[\vec{A} \times \vec{B}\right] = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B};$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 \vec{A};$$

$$\operatorname{div} \vec{r} = 3;$$

$$\operatorname{rot} \vec{r} = 0;$$

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r};$$

$$\operatorname{grad}(1/r) = -\vec{r}/r^3.$$

Теорема Остроградского—Гаусса

$$\int_V \operatorname{div} \vec{A} dV = \oint_S A_n dS,$$

где n — внешняя нормаль к S, охватывающей объем V.

Теорема Стокса

$$\oint_L A_l dl = \int_S \operatorname{rot}_n \vec{A} dS,$$

где S — поверхность, натянутая на замкнутый контур S, а n — нормаль к этой поверхности, составляющая правовинтовую систему с направлением обхода контура.

Система уравнений Максвелла

В основе макроскопической электродинамики лежат уравнения Максвелла, опирающиеся на несколько физических законов. Закон Фарадея

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};$$

закон Био—Савара и наличие тока смещения

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};$$

закон Кулона, приводящий к теореме Гаусса

$$\operatorname{div}\vec{D} = 4\pi\varrho,$$

и отсутствие точечных магнитных зарядов

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0,$$

где $\vec{E}$ и $\vec{H}$ — напряженности электрического и магнитного полей, $\vec{D}$ и $\vec{B}$ — векторы индукции полей, определяемые уравнениями

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E},\ \ \vec{B} = \vec{H} + 4\pi\vec{M} = \mu\vec{H}.$$

Здесь $\vec{P}$ — поляризованность, дипольный электрический момент единицы объема, $\vec{M}$ — намагниченность, дипольный магнитный момент единицы объема, ϱ — объемная плотность свободных зарядов, $\vec{j} = \varrho\vec{v}$ — плотность электрического тока, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Система уравнений Максвелла записана в абсолютной Гауссовой системе единиц. Из линейности уравнений Максвелла следует *принцип суперпозиции* полей.

Из системы уравнений следуют два закона сохранения: *закон сохранения заряда*

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j},$$

и *закон сохранения энергии*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{(\vec{E}\vec{D})}{8\pi}+\frac{(\vec{H}\vec{B})}{8\pi}\right]+(\vec{j}\vec{E})+\operatorname{div}\left\{\frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}]\right\}=0,$$

или

$$-\frac{\partial W}{\partial t}=\int(\vec{j}\vec{E})dV+\oint(\vec{S}d\vec{s}),$$

где W — энергия поля,

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\left\{\vec{E}\vec{D}+\vec{H}\vec{B}\right\}dV,$$

$\vec{S}$ — вектор Пойнтинга,

$$\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right];$$

импульс поля $\vec{p}=\frac{1}{c^2}\int\vec{S}dV$.

Интегральная форма системы уравнений Максвелла имеет вид

$$\oint E_l dl=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint B_n ds,$$

$$\oint H_l dl=\frac{4\pi}{c}\iint j_n ds+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\iint D_n ds,$$

$$\oiint 4\pi\int\varrho dV,$$

$$\oiint B_n ds=0,$$

откуда следуют *граничные условия*

$$E_{1\tau}|=E_{2\tau}|,\ \ D_{1n}|-D_{2n}|=4\pi\sigma_{\text{своб}},$$

$$B_{1n}|=B_{2n}|,\ \ H_{1\tau}|-H_{2\tau}|=\frac{4\pi}{c}I_{\text{пов}}.$$

Полезным оказывается введение скалярного φ и векторного $\vec{A}$ потенциалов:

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\ \ \vec{B}=\operatorname{rot}\vec{A}.$$

1. КИНЕМАТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Электромагнитная волна в однородной непроводящей среде удовлетворяет уравнениям, полученным из уравнений Максвела (см. введение):

$$\Delta\vec{E}(\vec{r},t) - \tfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\tfrac{\partial^2\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0,$$
$$\Delta\vec{H}(\vec{r},t) - \tfrac{\varepsilon\mu}{c^2}\tfrac{\partial^2\vec{H}(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0. \qquad (1)$$

Эта волна поперечна, проекции векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ на направление распространения этой волны (вектор $\vec{k}$) равны 0:

$$(\vec{E}\cdot\vec{k}) = (\vec{B}\cdot\vec{k}) = 0, \quad \vec{E}\perp\vec{B}; \qquad (2)$$

кроме того,

$$\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H, \text{ где } |\vec{B}| = \mu|\vec{H}|, \qquad (3)$$

поэтому все поля по величене и направлению удобно выражать через вектор напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Вектор Пойтинга в волне

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right] = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\frac{\varepsilon E^2}{4\pi}. \qquad (4)$$

Фазовая скорость распространения волны $\vec{v}_{\text{фаз}} = \frac{\vec{c}}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, плотность энергии в волне $\varrho = \frac{dW}{dV} = \frac{\varepsilon E^2}{4\pi}$. Тогда интегралы движения в волне:

$$\text{энергия } W = \int\frac{\varepsilon E^2}{4\pi}\,\mathrm{d}V,$$
$$\text{импульс } \vec{P} = \int\frac{\vec{S}}{c^2}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{4\pi c}\int\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\mathrm{d}V, \qquad (5)$$
$$\text{момент импульса } \vec{M} = \left[\vec{r}\times\vec{P}\right] = \frac{1}{4\pi c}\int\left[\vec{r}\times\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]\right]\mathrm{d}V.$$

Модуль волнового вектора $|\vec{k}| \equiv k$ связан с другими параметрами волны соотношениями

$$k = \frac{\omega}{v_{\text{фаз}}} = \frac{n\omega}{c} = \sqrt{\varepsilon\mu}\,\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{P}{\hbar}, \tag{6}$$

где λ — длина волны, $\vec{P}$ — импульс, $\hbar = h/2\pi$ — постоянная Планка.

Плоская монохроматическая волна:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right], \tag{7}$$

сферическая волна:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{r} \exp\left[i(kr - \omega t)\right]. \tag{8}$$

Поляризация волны в общем случае эллиптическая:

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2 = 1. \tag{9}$$

Поляризованная по кругу волна $(E_1 = E_2 = E_0)$:

$$E_z = 0, \;\; E_x = E_0 \cos\omega t, \;\; E_y = E_0 \sin\omega t.$$

Если $E_x = 0$ или $E_y = 0$, то волна плоскополяризованная. Плоскость поляризации, которая образована векторами $\vec{E}$ и $\vec{k}$, в общем случае вращается по мере распространения волны.

При падении плоской монохроматической волны из среды с показателем n_1 в среду с показателем n_2 при угле падения θ_0, угле отражения θ_1 и угле преломления θ_2 выполняются законы отражения $\theta_0 = \theta_1$ и преломления (закон Снелиуса):

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{v_2}{v_1}, \;\; (\mu = 1). \tag{10}$$

Формулы Френеля. Представим вектор $\vec{E}_0$ как сумму двух векторов $\vec{E}_0 = \vec{E}_0^{\perp} + \vec{E}_0^{\shortparallel}$, где $\vec{E}_0^{\shortparallel}$ — вектор электрического поля падающей

волны, лежащий в плоскости падения, а $\vec{E}_0^{\perp}$ — вектор электрического поля падающей волны, перпендикулярный плоскости падения. Тогда для отраженной волны получается

$$E_1^{\shortparallel}=E_0 \operatorname{tg}(\theta_0-\theta_2) / \operatorname{tg}(\theta_0+\theta_2), \; E_1^{\perp}=-E_0^{\perp} \sin(\theta_0-\theta_2) / \sin(\theta_0+\theta_2), \tag{11}$$

а для преломленной волны

$$E_2^{\shortparallel} = E_0^{\shortparallel} \frac{\sin\theta_0 \sin\theta_2}{\sin(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)}, \; E_2^{\perp} = E_0^{\perp}\frac{2\cos\theta_0\sin\theta_2}{\sin(\theta_0+\theta_2)}. \tag{12}$$

В случае нормального падения

$$E_1 = E_0 (n_1 - n_2) / (n_1 + n_2), \quad E_2 = 2E_0 n_1 / (n_1 + n_2). \tag{13}$$

Когда $\theta_0+\theta_2 = \pi/2$ из уравнения (11) следует, что $E_1^{\shortparallel} = 0$, т. е. отраженная волна является плоскополяризованной. При этом угол θ_{0B}, определяемый соотношением $\operatorname{tg}\theta_{0B} = n_2/n_1$, называется углом Брюстера.

При падении из оптически более плотной среды в менее плотную $n_2 < n_1$ угол $\theta_2 > \theta_0$. Возникает понятие критического угла $\overline{\theta}_0$, при котором

$$\theta_2 = \pi/2, \quad \sin\overline{\theta}_0 = \frac{n_2}{n_1}. \tag{14}$$

Это полное внутренне отражение, при этом $\theta_1 = \theta_0$, а плоская волна, проникая во вторую среду, имеет вид

$$E_x = E_0\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_0}{n_{12}^2}}\exp\left[i\omega\left(t-\frac{x\sin\theta_0}{v_2 n_{12}}\right)\right]\exp\left[-z\frac{\omega}{c}\sqrt{1-\frac{\sin^2\theta_0}{n_{12}^2}}\right], \tag{15}$$

где $n_{12} = n_2/n_1$.

В неоднородной среде наблюдается рефракция, уравнение для которой имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}N}, \tag{16}$$

где ρ — радиус кривизны луча, n — показатель преломления, а N — главная нормаль к лучу.

1.1. Кинематика волны

1.1. 1) Доказать поперечность любой электромагнитной волны, имеющей вид $\vec{E} = \vec{E}_0 \left(t - x \cdot \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}\right)$. Показать, что $\sqrt{\varepsilon}E = \sqrt{\mu}H$. 2) Найти поток энергии, плотность импульса и момента импульса электромагнитной волны. 3) Записать векторы напряженности плоской монохроматической волны: а) плоскополяризованной; б) поляризованной по кругу; в) эллиптически поляризованной.

1.2. Покоящийся электрон начал двигаться в однородном электрическом поле $\vec{E} = (E, 0, 0)$. Подсчитать, насколько он отстает от фронта собственного излучения. Найти закон движения фронта. Электрон все время считать нерелятивистским.

1.3. Вычислить напряженности электрического и магнитного полей для солнечного света, если в одну минуту на 1 см^2 падает в среднем две калории солнечной энергии (1кал $= 4,2 \cdot 10^7$эрг).

1.4. Показать, что уравнения Максвелла с добавочными малыми членами $\left(k_0^2 \ll 1\right)$ содержащими электромагнитный потенциал

$$\vec{A}, \varphi : \begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - k_0^2 \vec{A}; \ \operatorname{div} \vec{E} = k_0^2 \varphi, \\ \operatorname{rot} \vec{E} = -\left(\frac{\varepsilon}{c}\right) \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases}$$

имеют решения в виде плоских волн с продольным электрическим полем

$$E_z = E_0 \cdot e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Убедиться, что при $k_0^2 \to 0$ $E_z \to 0$.

1.5. Используя симметрию и законы сохранения зарядов, написать полную систему уравнений Максвелла при наличии не только электрических, но и магнитных зарядов (монополей) и токов.

1.6. Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси Z. Одна с амплитудой a поляризована по оси X, а другая с амплитудой b — по оси Y, причем опережает первую по фазе на χ. Какова поляризация результирующей волны? Рассмотреть случай равных амплитуд.

1.7. Две монохроматические волны одной частоты поляризованы по кругу в противоположных направлениях и, имея одинаковые фазы, распространяются в одном направлении. Найти зависимость поляризации результирующей волны, от отношения $E_{\text{л}}/E_{\text{п}}$ амплитуд соответственно правополяризованной и левополяризованной волн.

1.8. Большое число (N+1) поляроидов уложено в стопку. Ось каждого последующего поляроида составляет угол α с осью предыдущего, так что ось последнего образует с осью первого угол $\theta = N\alpha$. Найти интенсивность света на выходе из стопки, если на вход падает линейно поляризованный свет интенсивности I_0, направление плоскости поляризации которого совпадает с осью первого поляроида. Поляроиды считать идеальными, потерями на отражение света пренебречь. Оценить интенсивность при $\theta = 90^\circ$ и $N = 50$.

1.9. Найти формулы для релятивистского эффекта Доплера (по частоте ω и волновым векторам $\vec{k}$) при произвольном направлении скорости $\vec{v}$ относительно инерциальных систем отсчета.

1.10. С какой скоростью должен ехать автомобилист, чтобы спутать красный светофор с зеленым (анекдот о Вуде) ?

1.11. Найти частоту световой волны, наблюдаемой при поперечном эффекте Доплера (в системе, связанной с приемником, свет распространяется перпендикулярно направлению движения источника). Каково направление распространения света в системе, связанной с источником?

1.12. Длина волны света в системе, связанной с источником, равна

λ_0. Какую длину волны зарегистрирует наблюдатель: а) приближающийся и б) удаляющийся от источника с одной и той же скоростью.

1.13. Ракета с передатчиком, работающим на стабилизированной частоте $\nu_0 = 10$МГц, запускается в верхние слои атмосферы, где газ ионизован и показатель преломления среды n меньше единицы. Скорость удаления ракеты по линии наблюдения $v = 6 \cdot 10^4$ см/с. Биения частоты при смешивании принятого с ракеты сигнала и другого сигнала с частотой ν_0 равны $\Delta\nu = 10$ Гц. Из этих данных определить показатель преломления среды n, в которой движется ракета.

1.14. Найти спектральное распределение света, излучаемого разреженным газом, находящимся в термодинамическом равновесии при температуре T. (Считать, что атомы излучают лишь одну спектральную линию, частота которой в системе, связанной с атомом, равна ν_0.)

1.15. Источник, излучающий изотропно в собственной системе отсчета свет с частотой ω_0 , проходит мимо наблюдателя на прицельном расстоянии d со скоростью v (движение источника все время равномерно и прямолинейно). Интенсивность излучения в собственной системе I_0 (число квантов в единичный телесный угол в единицу времени). Найти зависимость ω и I в системе наблюдателя от угла θ между направлением луча и скоростью v. При каких углах $\theta = \theta_0$, $\omega = \omega_0$? Какая доля квантов регистрируется наблюдателем в областях $0 \le \theta \le \theta_0$ и $\theta_0 \le \theta \le \pi$? Привести графики зависимостей $\omega(\theta)$ и $I(\theta)$ при $\frac{v}{c} = \beta = \frac{1}{3}$ и $\beta = \frac{4}{5}$. Каков характер этих зависимостей при $\beta \to 1$?

1.2. Граничные условия. Формулы Френеля

1.16. Вывести граничные условия для полей электромагнитной волны. Используя их, получить законы отражения и преломления, а

также доказать равенство частот в отраженной и преломленной волнах.

1.17. Найти коэффициенты отражения и прохождения для электромагнитной волны, падающей нормально на плоскую границу между вакуумом и средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ.

1.18. Проверить с помощью формул Френеля на примере нормального падения, что энергия падающей монохроматической электромагнитной волны на плоскую границу двух сред равна сумме энергий преломленной и отраженной волн.

1.19. На плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n падает под углом α к нормали к пластинке плоская линейно поляризованная монохроматическая световая волна. Плоскость поляризации волны образует угол β с нормалью к плоскости падения. Найти угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения после прохождения света через пластинку (многократными отражениями внутри пластинки пренебречь).

1.20. Диэлектрический слой с проницаемостью ε_2, ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = a$, разделяет диэлектрические среды с проницаемостями ε_1 и ε_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). На этот слой из области $z < 0$ падает нормально к его поверхности электромагнитная волна. При какой толщине слоя отражение будет минимальным? При каком соотношении между ε_1, ε_2, ε_3 отражения не будет (условие просветленной оптики).

1.21. На диэлектрическую пленку с показателем преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ по нормали к поверхности падает монохроматическая волна. Толщина пленки $d \ll \lambda$. Найти коэффициент отражения волны.

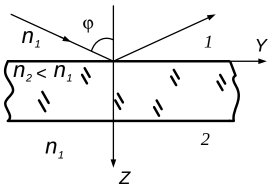
1.22. Вывести формулы Френеля и найти выражение коэффициентов отражения и прохождения через заданные угол падения φ и

коэффициент преломления n . Рассмотреть случай полного внутреннего отражения.

1.23. При каком угле падения волна с произвольной поляризацией после отражения от плоской границы диэлектриков становится плоскополяризованной?

1.24. Показать, что после полного внутреннего отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию. При каких условиях поляризация будет круговой?

1.25. Луч света падает на поверхность плоскопараллельной пластинки толщиной d, под углом φ, большим угла полного внутреннего отражения. Найти интенсивность света, прошедшего через пластинку. Электрическое поле волны параллельно поверхности пластинки.



1.26. Найти формулы Френеля в случае если магнитные проницаемости μ_1, μ_2 обеих сред отличны от единицы.

1.27. Естественный некогерентный немонохроматичный свет падает под некоторым углом на толстую стеклянную прозрачную плоскопараллельную пластинку. Коэффициенты отражения по интенсивности для этого угла равны $r_{\parallel}$, если вектор напряженности $\vec{E}$ параллелен плоскости падения луча света, и $r_{\perp}$, если $\vec{E}$ перпендикулярен плоскости. Найти степень поляризации $\triangle$ прошедшего сквозь пластинку света интенсивности $I_{\text{пр}}$ $\left(\triangle = (I_{\text{пр}\perp} - I_{\text{пр}\|})/(I_{\text{пр}\perp} + I_{\text{пр}\|})\right)$; многократными отражениями внутри пластинки пренебречь.

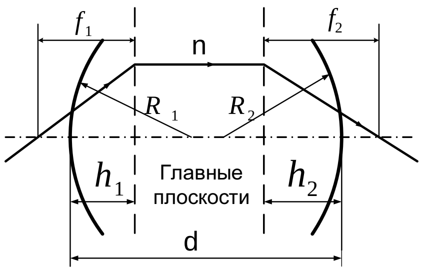
1.28. Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна падает по нормали на проводящую бесконечно тонкую поверхность, для которой имеет место закон Ома $I = \sigma E$, где I — ток через единицу длины, а σ — соответствующая проводимость. Найти коэффициент прохождения волны.

1.29. Плоская монохроматическая электромагнитная волна падает нормально на слой неоднородной плазмы (концентрация плазмы меняется линейно: $N \propto N_0 Z$). Рассмотреть распространение этой волны (*Указание*. При отсутствии поглощения диэлектрическая проницаемость зависит от плотности по закону $\varepsilon = 1 - 4\pi e^2 N/m\omega^2$, где ω — частота волны, а m — масса электрона).

1.3. Геометрическая оптика

1.30. С помощью принципа Ферма найти: а) закон преломления света на плоской границе двух однородных сред с показателями преломления n_1 и n_2 ; б) фокусное расстояние тонкой линзы с радиусами кривизны поверхностей R_1 и R_2 с показателем преломления n и сферического зеркала радиуса R.

1.31. Эффективным методом расчета оптических систем является *матричный формализм*. В этом методе точка пересечения луча с плоскостью, ортогональной оси системы, характеризуется расстоянием x до оси и углом $\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, между лучом и осью. Тогда точки (x_1, α_1) и (x_2, α_2), являющиеся изображением друг друга (сопряженные точки), связаны матрицей M_{12} оптического преобразования, причем $\mathrm{Det} M_{12} = \frac{n_1}{n_2}$ — отношению показателей преломления среды в точках 1, 2. Так, матрица пустого промежутка длиной d есть $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ а матрица тонкой линзы, помещенной в среду с $n = 1$, имеет вид $M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$.



Используя матричный формализм: 1) получите «формулу тонкой линзы»; 2) найдите положение фокусов, главных плоскостей и фокусные расстояния «толстой» линзы и покажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$, где a, b — расстояния от предмета и изображения до входной и выходной глав-

ных плоскостей соответственно.

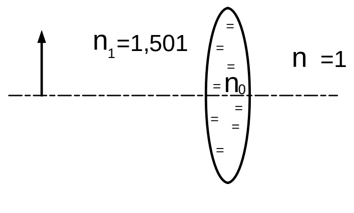
1.32. При какой толщине двояковыпуклая линза из стекла с показателем преломления n будет действовать как плоскопараллельная пластинка? Радиусы кривизны поверхностей линзы считать известными.

1.33. У тонкой двояковыпуклой линзы серебрится одна из поверхностей с радиусом кривизны R_2. Радиус чистой поверхности R_1. Найти фокусное расстояние полученного таким образом зеркала, если показатель преломления стекла линзы n.

1.34. Найти расстояние от центра стеклянного шара ($n = 1,5$) радиуса $R = 4$ см до изображения предмета, который расположен в 6 см от поверхности шара. Найти размер изображения.

1.35. Две тонкие линзы с фокусными расстояниями f_1 и f_2 находятся на расстоянии l друг от друга, образуя собой центрированную систему. Найти фокусное расстояние этой системы, а также положение ее главных плоскостей.

1.36. Предмет находится на двойном фокусном расстоянии от линзы с показателем преломления $n_0 = 1,504$ (оптическое стекло крон). Как изменится положение и размер изображения, если пространство между предметом и линзой залить бензолом $(n_1 = 1,501)$? Линза симметричная, двояковыпуклая, углы малы.



1.37. Имеются две системы N линз с одинаковыми фокусными расстояниями $|f|$ каждой линзы. Найти траекторию луча в каждой из систем, если расстояние между линзами — d. Рассмотреть случаи: а) система составлена только из собирающих линз. При каком соотношении d/f решение неустойчиво ? б) Система состоит из чередующихся рассеивающих и собирающих линз.

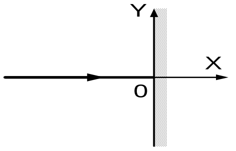
1.4. Рефракция

1.38. Найти радиус кривизны светового луча при его распространении в прозрачной среде с медленно изменяющимся показателем преломления n .

1.39. Градиент показателя преломления воздуха вблизи земной поверхности составляет около $3 \cdot 10^{-10}$ см$^{-1}$. Определить радиус кривизны луча, распространяющегося в атмосфере в горизонтальном направлении. Каков должен быть градиент, чтобы луч света, выйдя в горизонтальном направлении, описал окружность вокруг земного шара ?

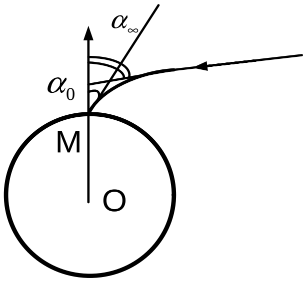
1.40. При какой массе планеты, имеющей радиус, равный радиусу Земли, и земной состав атмосферы, луч света может обогнуть планету по окружности ?

1.41. Пространство $x > 0$ занято прозрачной средой, показатель



преломления которой меняется по закону $n = n_0 + ky$. Перпендикулярно к поверхности раздела падает луч света (при $y = 0$). Найти траекторию луча в среде.

1.42. Считая, что показатель преломления n воздуха зависит



только от расстояния до центра Земли, найти астрономическую рефракцию с учетом кривизны земной поверхности. Рефракцией называется разность между величиной α_∞ (α_∞ — угол, образуемый асимптотой к лучу с вертикалью места наблюдения) и величиной α_0 (α_0 — видимое зенитное расстояние объекта при наблюдении из точки M).

1.43. Найти рефракцию, считая разность $n - 1$ пропорциональной плотности воздуха и полагая, что последняя меняется с высотой согласно барометрической формуле (атмосфера изотермическая).

1.44. Насколько раньше мы видим восход солнца из-за рефракции

($n_0 = 1,003$; $h = 8\,$км)?

1.5. Решение типичных задач

Р.1. Вывести граничные условия для полей электромагнитной волны. Используя их, получить законы отражения и преломления, а также доказать равенство частот в отраженной и преломленной волнах.

Электромагнитное поле характеризуется величинами $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$: $\vec{E}$ — напряженность электрического поля, $\vec{D}$ — электрическая индукция, $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля, $\vec{B}$ — магнитная индукция. Векторы поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ являются в общем случае функциями координат и времени и связаны между собой соотношениями $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\vec{H}$. Величина ε называется диэлектрической проницаемостью, а μ — магнитной проницаемостью сред. Диэлектрическая и магнитная проницаемости являются функциями координат, при некоторых постановках они могут зависеть от времени.

Поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$ подчиняются законам, которые формируются в виде системы уравнений Максвелла. Здесь мы будем пользоваться интегральной формой уравнений Максвелла. В Гауссовой системе единиц они имеют вид

$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \vec{B}\mathrm{d}S,$$

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0,$$

$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{4\pi}{c}\int\int \vec{j}\mathrm{d}\vec{S} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \vec{D}\mathrm{d}\vec{S},$$

$$\oint \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = 4\pi\int\int\int \rho\mathrm{d}v,$$

где ρ — объемная плотность зарядов, $\vec{j}$ — плотность тока ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$, где γ — проводимость), c — скорость света в вакууме. Для случая

электромагнитных волн в непроводящей среде $\vec{j}=0$, и при отсутствии зарядов $(\rho=0)$ уравнения примут вид

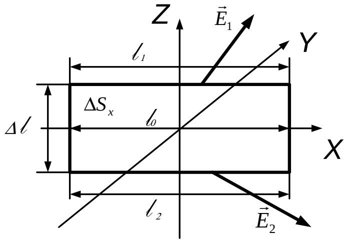
$$\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{S}; \qquad (1)$$

$$\oint \vec{B}\mathrm{d}\vec{S} = 0; \qquad (2)$$

$$\oint \vec{H}\mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int\int \vec{D}\mathrm{d}\vec{S}; \qquad (3)$$

$$\oint \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = 0. \qquad (4)$$

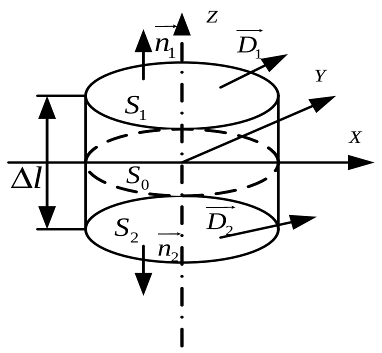
Выясним, как изменяются векторы электромагнитного поля на границе раздела двух сред с различными свойствами. Пусть одна среда характеризуется проницаемостями ε_1 и μ_1, вторая — соответственно ε_2 и μ_2, а границей является плоскость $Z=0$. Применим уравнение (1) к контуру, ограничивающему малую площадку ΔS_x, пересекающую границу раздела и нормальную к ней. На рисунке эта площадка расположена в плоскости рисунка. Левая часть уравнения — интеграл по замкнутому выбранному контуру. Под интегралом стоит скалярное произведение векторов $\vec{E}$ и $\mathrm{d}\vec{\ell}$, где $\mathrm{d}\vec{\ell}$ — вектор элементарного приращения, длина которого равна элементарному приращению длины контура $\mathrm{d}\vec{\ell}$, а направление совпадает с направлением касательной к контуру в соответствующей точке. Это скалярное произведение равно произведению проекции вектора $\vec{E}$ на направление вектора $\mathrm{d}\vec{\ell} - E_{\tau x}$ и длины $\mathrm{d}\vec{\ell}$, т. е. $(\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}) = E_{\tau x}\mathrm{d}\ell$. Площадка ΔS_x пересекает поверхность раздела по длине ℓ_0. Пусть стороны площадки ℓ_2 и ℓ_1 параллельны поверхности раздела, а $\Delta\ell$ — длина сторон площадки, пересекающих поверхность раздела. Если $\Delta\ell$ стремится к нулю: $\Delta\ell\to 0$, то ℓ_1 и ℓ_2 будут стремиться к ℓ_0, а площадь ΔS_x будет стремиться к нулю. Левая часть



уравнения (1) при $\Delta\ell \to 0$ (с точностью до величин второго порядка малости) будет равна $\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{\ell} = (E_{1\tau x} - E_{2\tau x}) \cdot \ell_0$, где $E_{1\tau x}$ и $E_{2\tau x}$ — касательные составляющие вектора $\vec{E}$ соответственно в первой и второй средах и лежащие в плоскости площадки ΔS_x. Длина ℓ_0 выбрана настолько малой, что можно пренебречь изменением E_τ на этом отрезке.

Правая часть уравнения (1), представляющая изменение во времени потока вектора $\vec{B}$ через площадку ΔS_x, пропорциональна площади ΔS_x и сведется к нулю при $\Delta S_x \to 0$, поскольку B конечно. Получим $(E_{1\tau x} - E_{2\tau x}) \cdot \ell_0 = 0$, откуда $E_{1\tau x} |= E_{2\tau x} |$. Если применить уравнение (1) к площадке ΔS_y, перпендикулярной рассмотренной и границе раздела, и провести рассуждения, аналогичные произведенным, то получим $E_{1\tau y} |= E_{2\tau y} |$, где $E_{1\tau y} |$ и $E_{2\tau y} |$ — касательные к поверхности раздела, составляющие вектора $\vec{E}$ соответственно в первой и второй средах, лежащие в плоскости площадки ΔS_y. Итак, доказана непрерывность проекций на два взаимно перпендикулярных направления касательной к поверхности раздела, составляющей $\vec{E}$, значит, непрерывна полная касательная, составляющая $\vec{E}_\tau$, т. е. $\vec{E}_{1\tau} |= \vec{E}_{2\tau} |$.

Аналогично, из уравнения (3) следует непрерывность касательных или тангенциальных составляющих вектора $\vec{H}$ при переходе через границу раздела двух сред (если на границе раздела нет поверхностных токов): $\vec{H}_{1\tau} |= \vec{H}_{2\tau} |$.



Покажем, что из уравнения (4) следует непрерывность нормальных к поверхности раздела составляющих вектора электрической индукции $\vec{D}$. Рассмотрим малый цилиндр с образующими $\Delta\ell$, перпендикулярными к поверхности раздела. Этот цилиндр вырезает из поверхности элемент S_0 столь малый, что его можно считать плоским. Основания цилиндра площади S_1 и S_2 параллельны поверхности раздела. Вычислим поток вектора $\vec{D}$ через поверхность

цилиндра:

$$\oint \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = D_1 \cos(\widehat{\vec{D}_1\vec{n_1}})S_1 + D_2 \cos(\widehat{\vec{D}_2\vec{n_2}})S_2 + \Phi,$$

где D_1 и D_2 — значения вектора $\vec{D}$ на соответствующих основаниях цилиндра; $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$ — внешние нормали к этим основаниям; Φ — поток через боковую поверхность цилиндра. Если уменьшить высоту цилиндра $\Delta\ell$, не изменяя при этом S_0, то площадь боковой поверхности цилиндра и поток Φ вектора $\vec{D}$ через эту поверхность будет стремиться к нулю. Учитывая, что

$$D_1 \cos(\widehat{\vec{D}_1\vec{n_1}}) = D_{1n}, \quad D_2 \cos(\widehat{\vec{D}_2\vec{n_2}}) = -D_{2n},$$

поток вектора $\vec{D}$ через поверхность цилиндра в пределе при $\Delta \to 0$ будет равен

$$\lim_{\Delta\ell\to 0} \oint \vec{D}\mathrm{d}\vec{S} = (D_{1n}| - D_{2n}|)S_0,$$

где D_{1n} и D_{2n} — нормальные составляющие вектора $\vec{D}$ к поверхности раздела со стороны первой и второй сред, $D_{1n}|$, $D_{2n}|$ — нормальные составляющие вектора $\vec{D}$ на основаниях цилиндра. Из уравнения (4) поток равен нулю, поэтому $(D_{1n}| - D_{2n}|)S_0 = 0$, откуда $D_{1n}| = D_{2n}|$.

Применяя аналогичные рассуждения к уравнению (2), получаем

$$B_{1n}| = B_{2n}|.$$

Итак, на границе раздела должны выполняться граничные условия

$$\vec{E}_{1\tau}| = \vec{E}_{2\tau}|, \quad \vec{H}_{1\tau}| = \vec{H}_{2\tau}|; \tag{5}$$

$$D_{1n}| = D_{2n}|, \quad B_{1n}| = B_{2n}|. \tag{6}$$

Рассмотрим прохождение электромагнитной волны через границу двух непроводящих сред. В случае однородной среды $\varepsilon = \mathrm{const}$,

$\mu = \text{const}$ из уравнений Максвелла, взятых в дифференциальной форме, можно получить уравнения второго порядка для $\vec{E}$ и $\vec{H}$:

$$\Delta\vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0, \quad \Delta\vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0.$$

Эти уравнения допускают частные решения в виде монохроматических плоских волн

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0 e^{\pm i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}, \tag{7}$$

где $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ — константы, называемые амплитудами волны; ω — циклическая частота волны; $|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{2\pi}{\lambda}$ — длина волнового вектора, а направление волнового вектора $\vec{k}$ совпадает с направлением распространения волны. Векторы $\vec{k}, \vec{E}, \vec{H}$ взаимно перпендикулярны и образуют правовинтовую систему, причем

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega}[\vec{k} \times \vec{E}]. \tag{8}$$

Можно показать, что для монохроматических полей (7) условия (6) выполняются автоматически, если выполняются условия (5). Кроме того, для каждой волны $\vec{E}$ и $\vec{H}$ связаны соотношением (8). Поэтому одновременно удовлетворить условию (8) и двум граничным условиям (5) можно только допустив, что падающая волна частично проходит во вторую среду, а частично отражается от поверхности раздела. Особенно просто это можно проиллюстрировать на примере падения волны по направлению, перпендикулярному плоскости раздела. Тогда у падающей волны есть только тангенциальные составляющие векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$. Если существует только проходящая волна, то из граничных условий (5) у этой волны те же вектора $\vec{E}_1$ и $\vec{H}_1$, что и у падающей, т. е. $E_1 = E_2 = E$, $H_1 = H_2 = H$. С другой стороны, учитывая (8), $H_1 = \sqrt{\varepsilon_1/\mu_1}E_1$, а $H_2 = \sqrt{\varepsilon_2/\mu_1}E_2$, что противоречит равенству $H_1 = H_1$.

Покажем, что у всех волн — падающей, отраженной и прошедшей — частота ω одинакова и равна частоте падающей волны. Пусть

на плоскую границу раздела $z = 0$ падает плоская волна

$$\vec{E}^{(\ell)} = \vec{E}_0^{(\ell)} e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r})},$$

а отраженную и прошедшую, или преломленную, волны запишем в виде

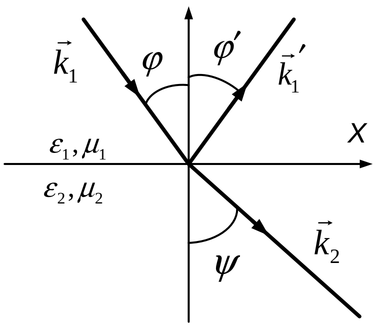
$$\vec{E}^{(r)} = \vec{R} e^{-i(\omega_r t - \vec{k}_1' \vec{r})},$$

$$\vec{E}^{(d)} = \vec{D} e^{-i(\omega_d t - \vec{k}_2' \vec{r})}. \quad (9)$$

Граничные условия (5) должны выполняться для всех точек границы раздела. Любое из условий (5) для произвольной точки поверхности раздела $\vec{r} = \vec{r}_0$, можно записать в виде

$$A(\vec{r}_0)e^{-i\omega t} + B(\vec{r}_0)e^{-i\omega_r t} + C(\vec{r}_0)e^{-i\omega_d t} = 0. \quad (10)$$

Константы $A(\vec{r}_0)$, $B(\vec{r}_0)$, $C(\vec{r}_0)$ отличны от нуля, если отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Этому условию при всех t можно удовлетворить, если только $\omega = \omega_r = \omega_d$.



Найдем связь между волновыми векторами падающей $\vec{k}_1$, отраженной $\vec{k}_1'$ и прошедшей $\vec{k}_2$ волн. Ось z направим в сторону второй среды. Плоскость раздела $z = 0$ будет плоскостью XY. За ось X возьмем линию пересечения плоскости раздела сред с плоскостью падения. Напомним, что плоскость падения — это плоскость, в которой лежат волновой вектор падающей волны $\vec{k}_1$ и нормаль к плоскости раздела, в нашем случае ось z. В выражениях (9) скалярное произведение вида $\vec{k}\vec{r}$, записанное для плоскости раздела, представлено в виде $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y$. Тогда любое из условий (5) с учетом равенства частот при $y = y_0$ запишется в виде

$$A(y_0)e^{ik_{1x}x} + B(y_0)e^{ik'_{1x}x} + C(y_0)e^{ik_{2x}x} = 0,$$

где $A(y_0), B(y_0), C(y_0)$ — постоянные и притом отличные от нуля, если только отраженная и прошедшая волны действительно существуют. Поскольку это равенство должно выполняться при всех x, то должно быть

$$k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}.$$

Мы выбрали расположение осей X, Y такими, что у падающей волны имеется только x-я и z-я компоненты волнового вектора k_{1x}, k_{1z}, а $k_{1y} = 0$. Покажем, что тогда $k'_{1y} = k_{2y} = 0$. Записав условия (5) для $x = x_0$, получим

$$A(x_0) + B(x_0)e^{ik'_{1y}y} + C(x_0)e^{ik_{2y}y} = 0;$$

$A(x_0), B(x_0), C(x_0)$ отличны от нуля. Чтобы это равенство выполнялось для всех y, нужно положить $k'_{1y} = k_{2y} = 0$. Таким образом, получаем, что волновые векторы отраженной $\vec{k'_1}$ и прошедшей волн $\vec{k_2}$ лежат в плоскости падения, а величины их проекций на границу раздела одинаковы и равны соответствующей проекции падающей волны. Найдем связь между углами падения, отражения и преломления. Поскольку величина волнового вектора определяется свойствами среды и частотой, то отсюда следует, что $k_1 = k'_1$, так как падающая и отраженная волны распространяются в одной среде $k = k'_1 = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\omega/c$. Учитывая, что $k_{1x} = k'_{1x}$, заключаем, что угол отражения φ' (см. рис. на с. 30) равен углу падения φ. Далее

$$k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \pm\sqrt{k_2^2 - k_{1x}^2}, \;\; k_{1z} = -\sqrt{k_1^2 - k_{1x}^2}.$$

Знак «минус» перед корнем для k_{1z} взят потому, что отраженная волна распространяется в сторону уменьшения z. Если $k_2^2 > k_{1x}^2$, то перед корнем для k_{2z} следует взять знак «плюс», это будет означать, что волна преломления распространяется в сторону возрастания z. Если ψ — угол преломления, то, учитывая, что

$$k_{1x} = k_1 \sin\varphi = \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}\,\frac{\omega}{c}\sin\varphi,$$

$$k_{2x} = k_2 \sin\psi = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}\,\frac{\omega}{c}\sin\psi,$$
$$k_{1x} = k_{2x},$$

получаем

$$\sin\varphi/\sin\psi = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1} = n_2/n_1,$$

где $n_i = \sqrt{\varepsilon_i\mu_i}$ называется показателем преломления i-й среды.

Для случая $k_2^2 < k_{1x}^2$, k_{2z} — чисто мнимая величина и зависит от z, определяется действительным множителем $e^{\pm|k_{2z}|z}$. Понятно, что нужно взять знак «минус», т. е. положить $k_{2z} = i\sqrt{k_{1x}^2 - k_2^2}$, иначе амплитуда прошедшей волны будет неограниченно возрастать по мере удаления от границы раздела, чего не может быть из-за закона сохранения энергии. Волна во второй среде неоднородная:

$$\vec{E}^{(d)} = \vec{D}e^{-z|k_{2z}|}e^{-i(\omega t - k_{1x}x)}.$$

Р.2. Найти коэффициенты отражения и прохождения для электромагнитной волны, падающей нормально на плоскую границу между вакуумом и средой с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ.

Пусть плоскостью раздела будет плоскость $z = 0$ с осью Z, направленной вниз, в сторону второй среды. Тогда по условию задачи волновой вектор падающей волны направлен вдоль положительного направления оси Z. Поскольку в плоской волне векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны волновому вектору $\vec{k}$, то направление оси X можно выбрать по направлению вектора $\vec{E}$. Тогда для падающей волны имеем

$$E_x^\ell = E_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)},\ \ E_y^\ell = 0,\ \ E_z^\ell = 0;$$

$$H_y^\ell = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}E_0^\ell e^{-i(\omega t - k_1 z)},\ \ H_x^\ell = 0,\ \ H_y^\ell = 0,$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}.$$

Для получения величины напряженности магнитного поля в волне использовано соотношение

$$\vec{H} = \frac{c}{\mu\omega}[\vec{k}\vec{E}]. \tag{1}$$

Для отраженной волны имеем аналогично

$$E_x^r = Re^{-i(\omega t + k_1 z)}, \;\; E_y^r = E_z^r = 0,$$

$$H_y^r = -\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}Re^{-i(\omega t + k_1 z)}, \;\; H_z^r = H_y^r = 0.$$

Для преломленной волны

$$E_x^d = De^{-i(\omega t - k_2 z)}, \;\; E_y^d = E_z^d = 0$$

$$H_y^d = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}De^{-i(\omega t - k_2 z)}, \;\; H_z^d = H_y^d = 0,$$

$$k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}.$$

Здесь учтено, что частоты падающей, отраженной и преломленной волн равны друг другу (см. задачу Р.1). Запишем условия непрерывности тангенциальных составляющих векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$. В первой среде есть волна падающая и отраженная, во второй — прошедшая, поэтому, полагая $z = 0$, получаем

$$E_0^\ell + R = D, \quad \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0^\ell - R) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}D.$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}E_0^\ell,$$

$$D = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}} E_0^\ell.$$

Коэффициент отражения $\rho^{(r)}$ есть отношение потоков энергии, отраженной и падающей волн, а коэффициент прохождения $\rho^{(d)}$ — отношение потоков энергии прошедшей и падающей волн. Найдем распределение энергии в падающей волне. Известно, что плотность энергии электромагнитного поля в среде

$$W = \frac{\vec{D}^\ell \cdot \vec{E}^\ell}{8\pi} + \frac{\vec{B}^\ell \cdot \vec{H}^\ell}{8\pi} = \frac{\varepsilon_1 (E^\ell)^2}{8\pi} + \frac{\mu_1 (H^\ell)^2}{8\pi}.$$

Здесь E^ℓ и H^ℓ действительные:

$$E^\ell = E_0^\ell \cos(\omega t - k_1 z), \quad H^\ell = H_0^\ell \cos(\omega t - k_1 z).$$

В силу соотношения (1), энергии магнитного и электрического полей в среде, так же как и в вакууме, равны между собой $\mu_1 (H^\ell)^2/8\pi = \varepsilon_1 (E^\ell)^2/8\pi$, поэтому

$$W = \frac{\varepsilon_1}{4\pi} (E_0^\ell)^2 \cos^2(\omega t - k_1 z). \tag{2}$$

Если зафиксировать время, то формула (2) даст распределение энергии в пространстве. Поскольку волна в среде движется со скоростью $v = c/\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}$, вместе с волной движется и энергия, запасенная в электромагнитном поле. Чтобы найти энергию, проходящую через единичную площадку, перпендикулярную направлению распространения волны, в единицу времени, усредним энергию W (2) по z, взяв в качестве интервала усреднения характерную для волны величину, например длину волны λ, т. е. $\Delta z = \lambda_1 = 2\pi/k_1$. Тогда

$$\langle W \rangle = \frac{1}{\lambda_1} \int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda_1} W(z) \mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi} \int\limits_{\omega t - k z_0 - 2\pi}^{\omega t - k z_0} \cos^2 \xi \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi}.$$

Средняя по координате плотность энергии не зависит от времени (это будет означать, что и средняя по времени плотность энергии будет равна той же величине $\overline{W} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi}$).

Зная среднее значение энергии, находим ее поток. Через единичную площадку, взятую перпендикулярно направлению распространения волны, в единицу времени пройдет энергия Π, запасенная в параллепипеде длиной, равной скорости волны $v = c/\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$ и с площадью основания, равной единице, т. е.

$$\Pi = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_1 (E_0^\ell)^2}{4\pi} v = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0^\ell)^2.$$

Это и есть средний по времени вектор Пойнтинга $\bar{S}^\ell$ для падающей волны. Если $\vec{E}$ и $\vec{H}$ записаны в комплексном виде, то средний вектор Пойнтинга

$$\bar{S} = \frac{c}{4\pi}|\overline{[\vec{E}\times\vec{H}]}| = \frac{1}{2} Re \frac{c}{4\pi}[\vec{E}\times\vec{H}^*] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}E_0^2.$$

Аналогично для энергии отраженной и преломленной волн имеем

$$|\bar{S}^r| = \frac{c}{8\pi} Re[\vec{E}^r \times \vec{H}^{r*}] = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}R^2 = \left(\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}\right)^2 \cdot |\bar{S}^\ell|,$$

$$|\bar{S}^d| = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2} \cdot |\bar{S}^\ell|.$$

Тогда

$$\rho^{(r)} = \frac{\bar{S}^r}{\bar{S}^\ell} = \frac{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}, \quad \rho^{(d)} = \frac{4\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}}{\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\right)^2}.$$

Если первая среда вакуум, то $\varepsilon_1 = \mu_1 = 1$ и, полагая $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\mu_2 = \mu$, получаем

$$\rho^{(r)} = \frac{(1 - \sqrt{\varepsilon/\mu})^2}{(1 + \sqrt{\varepsilon/\mu})^2}, \quad \rho^{(d)} = \frac{4\sqrt{\varepsilon/\mu}}{(1 + \sqrt{\varepsilon/\mu})^2}.$$

Если $\varepsilon = \mu$, то отражательная способность среды обращается в нуль $\rho^{(r)} = 0$ и вся энергия проходит во вторую среду: $\rho^{(d)} = 1$.

Р.3. На плоскопараллельную стеклянную пластинку с показателем преломления n падает под углом φ к нормали к пластинке плоская линейно поляризованная монохроматическая световая волна. Плоскость поляризации волны образует угол β с нормалью к плоскости падения. Найти угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения после прохождения света через пластинку (многократными отражениями внутри пластинки пренебречь).

Плоскость падения есть плоскость волнового вектора $\vec{k}$ и нормали к границе раздела, а плоскость поляризации — плоскость, в которой лежат векторы электрического поля $\vec{E}$ и волнового вектора $\vec{k}$. Плоскость падения для всех волн — падающей, отраженной и преломленной — одна и та же, что следует из равенства тангенциальных составляющих этих волн. Если β — угол между плоскостью поляризации падающей волны и нормалью к плоскости падения, то, учитывая, что вектор $\vec{E}^{\ell}$ перпендикулярен вектору $\vec{k}$, проекции вектора $\vec{E}$ на плоскость падения и перпендикуляр к ней, обозначаемые соответственно $\|$, $\perp$, будут равны

$$E_{\|} = E \sin\beta, \quad E_{\perp} = E\cos\beta. \tag{1}$$

Аналогично для преломленной волны E_1^d, если вторая среда занимает все полупространство,

$$E_{\|}^d = E^d \sin\beta_1, \quad E_{\perp}^d = E^d \cos\beta_1, \tag{2}$$

где β_1 — угол между плоскостью поляризации преломленной волны и нормалью к плоскости падения. Поскольку многократными отражениями можно пренебречь, считаем, что волна (2) является падающей на вторую (нижнюю) плоскость пластинки и связи $E_{\parallel}^d$ с $E_{\parallel}$, $E_{\perp}^d$ с $E_{\perp}$ определяются формулами Френеля:

$$\frac{E_{\parallel}^d}{E_{\parallel}} = \frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}, \quad \frac{E_{\perp}^d}{E_{\perp}} = \frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}, \tag{3}$$

где ψ — угол преломления.

Из формул (1)—(3) следует, что

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{E_{\parallel}^d}{E_{\perp}^d} = \frac{1}{\cos(\varphi-\psi)}\frac{E_{\parallel}}{E_{\perp}} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos(\varphi-\psi)}. \tag{4}$$

Волна E^d на второй границе будет падать под углом ψ, а преломится под углом φ. Поэтому

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos(\varphi-\psi)}, \tag{5}$$

где β^* — угол между плоскостью поляризации и нормалью к плоскости падения в прошедшей через пластинку волне. Значит,

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\cos^2(\varphi-\psi)}.$$

Найдем $\cos(\varphi-\psi)$. Так как $\sin\psi = \sin\varphi/n$, а $\cos\psi = \sqrt{1-(\frac{\sin\varphi}{n})^2}$, то

$$\cos(\varphi-\psi) = \cos\varphi\cdot\cos\psi + \sin\varphi\cdot\sin\psi = \frac{1}{n}(\cos\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\varphi} + \sin^2\varphi)$$

и

$$\operatorname{tg}\beta^* = \frac{n^2\operatorname{tg}\beta}{(\sin^2\varphi + \cos\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\varphi})^2}.$$

Р.4. На диэлектрическую пленку по нормали к поверхности падает монохроматическая волна. Показатель преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$, толщина пленки $d \ll \lambda$. Найти коэффициент отражения волны.

Направим ось Z перпендикулярно слою вниз, так что верхняя поверхность пленки занимает плоскость $z = 0$, а нижняя — плоскость $z = d$. При падении волны на слой в пространстве возникает волновое поле в зависимости от координат и времени, в общем случае отличное от поля падающей волны. Для того чтобы найти это поле, нужно решить волновые уравнения, написанные для каждой из областей $z \leq 0$, $0 \leq z \leq d$, $z > d$, и на плоскостях $z = 0$ и $z = d$ удовлетворить граничным условиям (см. задачу Р. 1). Частным решением волнового уравнения является плоская волна. Понятно, что для $z < 0$ кроме падающей волны

$$\vec{E}^{\ell} = \vec{E}_0^{\ell} e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad z \leq 0$$

может распространяться и отраженная волна, являющаяся результатом многократных отражений от верхней и нижней границ слоя и их интерференции, которую обозначим

$$\vec{E}^{r} = \vec{R} e^{-i(\omega t + k_1 z)}, \quad z \leq 0.$$

Внутри слоя $0 \leq z \leq d$ поле $\vec{E}_2$ по тем же причинам, что и для $z \leq 0$, будет состоять из полей двух плоских волн, распространяющихся в двух взаимно противоположных направлениях, которое представимо в виде

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{20} e^{-i(\omega t - k_2 z)} + \vec{E}'_{20} e^{-i(\omega t + k_2 z)}, \quad 0 \leq z \leq d.$$

За слоем $z \geq d$ может распространяться только прошедшая через слой волна. Запишем ее в виде

$$\vec{E}^{d} = \vec{D} e^{-i(\omega t - k_1 z)}, \quad z \geq d.$$

В приведенных выше формулах учтено, что волны распространяются вдоль оси Z, поскольку падающая волна не имеет тангенциальной

составляющей волнового вектора $\vec{k}$ по условию задачи. В каждой из волн напряженность магнитного поля связана с напряженностью электрического поля соотношением

$$\vec{H} = \frac{c}{\omega\mu}[\vec{k} \times \vec{E}]. \quad (1)$$

Поскольку ось X лежит в плоскости верхней границы слоя, то, не умаляя общности, при нормальном падении можно считать, что вектор $\vec{E}^{\ell}$ направлен по X, тогда векторы напряженностей электрических полей всех остальных волн направлены по X, а напряженности магнитных полей по Y. При переходе через границу двух сред остаются непрерывными тангенциальные составляющие (т. е. проекции на границу раздела) напряженностей электрического и магнитного полей (см. задачу Р. 1).

Чтобы записать граничные условия, мы должны в один момент времени зафиксировать поля на границе с обеих сторон границы и приравнять их. Поскольку в нашем случае тангенциальные составляющие напряженностей являются полными напряженностями, то непрерывность электрического поля и непрерывность магнитного поля при $z = 0$ с учетом уравнения (1) выразятся следующим образом:

$$E_0^{\ell} + R = E_{20} + E'_{20}; \quad (2)$$

$$k_1(E_0^{\ell} - R) = k_2(E_{20} - E'_{20}). \quad (3)$$

А при $z = d$ будем иметь

$$E_{20}e^{ik_2d} + E'_{20}e^{-ik_2d} = De^{ik_1d}; \quad (4)$$

$$k_2(E_{20}e^{ik_2d} - E'_{20}e^{-ik_2d}) = k_1De^{ik_1d}. \quad (5)$$

При написании соотношений (2)–(5) учтено, что для всех сред $\mu = 1$.

Коэффициент отражения ρ^r есть отношение энергии, переносимой отраженной волной через единичную площадку в единицу времени, к энергии, переносимой падающей волной через единичную площадку в единицу времени. Эти энергии равны средним значениям векторов Пойнтинга соответствующих волн (см. задачу P.2). Используя результаты этой задачи, имеем: среднее значение вектора для Пойнтинга падающей волны равно

$$\bar{S}^\ell = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}(E_0^\ell)^2,$$

где амплитуда падающей волны E_0^ℓ — действительная величина. Для отраженной волны амплитуда R может быть комплексной, тогда вектор Пойнтинга выразится следующим образом:

$$|\bar{S}^r| = \frac{c}{8\pi}|Re[\vec{E}\times\vec{H}^*]| = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}c}{8\pi}RR^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\varepsilon_1}|R|^2.$$

Здесь учтено, что $H^r = -c\sqrt{\varepsilon_1}Re^{-i(\omega t+k_1 z)}$.

Окончательно, коэффициент отражения таков:

$$\rho^r = \frac{|\bar{S}^r|}{|\bar{S}^\ell|} = \frac{|R|^2}{(E_0^\ell)^2}. \tag{6}$$

Из уравнений (2)—(5) выразим R через E_0^ℓ. Опуская простые арифметические вычисления, приводим окончательное выражение для R:

$$R = \frac{(k_2^2 - k_1^2)[e^{i2k_2d} - 1]E_0^\ell}{(k_2 + k_1)^2 - (k_2 - k_1)^2 e^{i2k_2d}}.$$

Поскольку

$$k_i = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_i} = \frac{\omega}{c}n_i,$$

где ε_i — диэлектрическая проницаемость, n_i — показатель преломления i-й среды, и, вводя относительный показатель преломления $n = n_2/n_1$, получаем

$$R = \frac{(n^2 - 1)(e^{i2k_2d} - 1)E_0^\ell}{(n + 1)^2 - (n - 1)^2 e^{i2k_2d}};$$

R представляет собой отношение комплексных чисел. Модуль такого выражения проще найти как отношение модулей числителя и знаменателя, поскольку

$$|(n^2-1)(e^{-i2k_2d}-1)|^2 = (n^2-1)^2 4\sin^2 k_2d$$

и

$$|(n+1)^2-(n-1)^2e^{-i2k_2d}|^2 = (4n)^2+4(n^2-1)^2\sin^2 k_2d,$$

тогда

$$|R|^2 = \frac{(n^2-1)^2\sin^2 k_2d}{4n^2+(n^2-1)^2\sin^2 k_2d}(E_0^\ell)^2.$$

Для коэффициента отражения получим выражение

$$\rho^r = \frac{(n^2-1)^2\sin^2 k_2d}{4n^2+(n^2-1)^2\sin^2 k_2d}.$$

При решении задачи мы нигде не учитывали, что толщина слоя много меньше длины падающей волны λ, поэтому полученный коэффициент отражения справедлив и для толстых слоев. При $k_2d = m\pi$ или $d = (\lambda_2/2)m$, где m — целое положительное число, λ_2 — длина волны в слое, $\rho = 0$, пленка становится прозрачной. Если пленка тонкая, так что $k_2d \ll 1$, что соответствует $\frac{2\pi}{\lambda}n_2d \ll 1$, то $\sin^2 k_2d \approx (k_2d)^2$, а в знаменателе вторым слагаемым можно пренебречь по сравнению с первым, тогда

$$\rho^r = \frac{(n^2-1)^2}{4n^2}\cdot\frac{4\pi^2n^2d^2}{\lambda^2} = \pi^2(n^2-1)^2\frac{d^2}{\lambda^2}.$$

P.5. При каком угле падения волна с произвольной поляризацией после отражения от плоской границы диэлектриков становится плоскополяризованной?

Для определения амплитуд отраженной и проходящей волн используются граничные условия: непрерывность проекций на плоскость раздела двух сред векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ возникающего волнового поля. При

этом электрическое поле каждой волны разлагают на две составляющие. Одна из них лежит в плоскости падения, другая перпендикулярна этой плоскости. Они обозначаются символами $\parallel$ и $\perp$ соответственно. Отношение амплитуд соответствующих проекций отраженной R и падающей $\mathcal{E}$ волн, называемые коэффициентами Френеля, равны

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp}=\frac{n_1\cos\varphi-n_2\cos\psi}{n_1\cos\varphi+n_2\cos\psi},\quad \frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel}=\frac{n_2\cos\varphi-n_1\cos\psi}{n_2\cos\varphi+n_1\cos\psi},$$

где $n_1,\ n_2$ — показатели преломления первой и второй среды соответственно, $\varphi,\ \psi$ — угол падения и преломления. Углы отсчитываются от нормали к плоскости раздела, волна падает из первой среды во вторую. Поскольку $n_1\sin\varphi=n_2\sin\psi$ (см. задачу Р. 1), то коэффициенты Френеля можно представить в виде

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp}=-\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)},\quad \frac{R_\parallel}{\mathcal{E}_\parallel}=\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)}.$$

При $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$ знаменатель $\operatorname{tg}(\varphi+\psi)$ во второй формуле обращается в бесконечность. В этом случае $R_\parallel=0$. Это значит, что при некотором угле падения отражение волны исчезает, если электрический вектор падающей волны лежит в плоскости падения. Отношение $R_\perp/\mathcal{E}_\perp$ никогда не обращается в нуль, за исключением случая $\operatorname{tg}\varphi=\sqrt{\mu_2(\mathcal{E}_2\mu_1-\mathcal{E}_1\mu_2)/\mu_1(\mathcal{E}_1\mu_1-\mathcal{E}_2\mu_2)}$, $\mu\neq 1$.

Найдем угол φ_B (угол Брюстера), при котором $R_\parallel=0$. Поскольку $\varphi_B+\psi_B=\frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi_B=\sin\psi_B=n_1\sin\varphi_B/n_2$, откуда $\operatorname{tg}\varphi_B=n_2/n_1$. Если волна с произвольной поляризацией падает под углом φ_B, то составляющая с электрическим вектором $E_\parallel$ отражаться не будет. В отраженной волне будет только составляющая $R_\perp$, т. е. волна окажется линейно поляризованной и притом перпендикулярна плоскости падения.

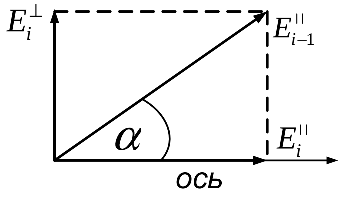
Р.6. Большое число $(N+1)$ поляроидов уложено в стопку. Ось каждого последующего поляроида составляет угол α с осью предыдущего, так что ось последнего образует с осью первого угол $\theta=\alpha N$.

Найти интенсивность света на выходе из стопки, если на входе падает линейно поляризованный свет интенсивности I_0 с направлением вектора $\vec{E}_0$ вдоль оси первого поляроида. Поляроиды считать идеальными, потерями на отражение света пренебречь. Оценить интенсивность при $\theta = 90^0$ и $N = 50$.

Поляроиды — это искусственно приготовляемые коллоидные пленки, служащие для получения поляризованного света. У поляроидов есть выделенное направление, называемое оптической осью поляроида. Они обладают способностью сильно поглощать световые лучи, у которых электрический вектор перпендикулярен к оптической оси, и пропускать без поглощения лучи, у которых электрический вектор $\vec{E}$ параллелен оси.

После прохождения первого поляроида интенсивность волны не изменится, поскольку по условию задачи у падающей волны вектор $\vec{E}_0$ направлен вдоль оптической оси поляроида. Пусть амплитуда падающей волны будет E_0, тогда $E_1^{\|} = E_0$, где $E_1^{\|}$ — амплитуда волны после прохождения первого поляроида. У второго поляроида ось направлена под углом α по отношению к $\vec{E}_1^{\|}$. Представляя волну с вектором $\vec{E}_1^{\|}$ в виде суперпозиции двух волн, одна из которых имеет вектор $\vec{E}$, параллельный оптической оси $\vec{E}_2^{\|}$, другая — в перпендикулярном направлении $\vec{E}_2^{\perp}$, заключаем, что после второго поляроида волна будет иметь амплитуду

$$E_2 = E_2^{\|} = E_1^{\|} \cos\alpha = E_0 \cos\alpha.$$



Понятно, что прохождение через каждый последующий поляроид добавляет в качестве множителя к напряженности электрического поля падающей волны $\cos\alpha$. После прохождения i-го поляроида $E_i = E_0(\cos\alpha)^{i-1}$. При $i = N+1$, $E_{N+1} = E_0(\cos\alpha)^N$. Так как интенсивность падающей

волны $I_0 = \frac{c}{4\pi}E_0^2$, то интенсивность света, проходящего стопку поляроидов,

$$I_{N+1} = \frac{c}{4\pi}E_{N+1}^2 = I_0(\cos\alpha)^{2N}.$$

При $\theta = 90^0$ и $N = 50$ $\alpha = \theta/N = 1,8^0 \approx 3 \cdot 10^{-2}$ рад. Как видим, $\alpha << 1$, тогда для вычисления степени косинуса малого угла воспользуемся его разложением в ряд Тейлора. Поэтому

$$I_{51} = I_0(\cos(3{\cdot}10^{-2}))^{100} \approx I_0[1-\frac{100}{2}{\cdot}(3{\cdot}10^{-2})^2] = I_0(1-0,05) = 0,95I_0.$$

Р.7. Показать, что после полного внутреннего отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптическую поляризацию. При каких условиях поляризация будет круговой?

При полном внутреннем отражении коэффициенты Френеля комплексны и для $R_\perp/\mathcal{E}_\perp$ и $R_\|/\mathcal{E}_\|$ имеют вид

$$\frac{R_\perp}{\mathcal{E}_\perp} = \frac{\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \quad \frac{R_\|}{\mathcal{E}_\|} = \frac{n^2\cos\varphi + i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n^2\cos\varphi - i\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}, \tag{1}$$

где $n = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления, φ — угол падения, причем $\sin\varphi > n$. Комплексность выражений (1) означает, что при полном отражении фаза каждой из волн испытывает скачок. Действительно, комплексные коэффициенты можно представить как

$$R_\perp/\mathcal{E}_\perp = Ae^{i\delta_\perp/2}/Ae^{-i\delta_\perp/2} = e^{i\delta_\perp},$$

$$R_\|/\mathcal{E}_\| = Be^{i\delta_\|/2}/Be^{-i\delta_\|/2} = e^{i\delta_\|},$$

где $A, B, \delta_\perp, \delta_\|$ — величины вещественные, причем

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\|}{2} = -\frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n^2\cos\varphi}. \tag{2}$$

Отраженную волну $\vec{E}^r$ можно записать в виде

$$\vec{E}^r = (R_{\|}\vec{e_\xi} + R_{\perp}\vec{e_\eta})e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)},$$

где $\vec{e_\xi}$, $\vec{e_\eta}$ — единичные векторы, направленные вдоль составляющих напряженности электрического поля, лежащих соответственно в плоскости падения $\vec{R}_{\|}$ и перпендикулярного к этой плоскости $\vec{R}_{\perp}$, или

$$\vec{E}^r = \mathcal{E}_{\|}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_{\|})}\vec{e_\xi} + \mathcal{E}_{\perp}e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_{\perp})}\vec{e_\eta}. \qquad (3)$$

Амплитуды $\mathcal{E}_{\|}$, $\mathcal{E}_{\perp}$ падающей волны вещественные, так как по условию она линейно поляризована. Таким образом, отраженная волна (3) есть суперпозиция двух линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных направлениях и сдвинутых по фазе на величину $\delta = \delta_{\|} - \delta_{\perp}$ волн. Для выяснения характера поляризации отраженной волны запишем ее в действительном виде в проекциях на оси ξ, η, выбранных соответственно вдоль $\vec{e_\xi}$, $\vec{e_\eta}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^r_\xi &= \mathcal{E}_{\|}\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_{\|}), \\ \mathcal{E}^r_\eta &= \mathcal{E}_{\perp}\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t+\delta_{\perp}). \end{aligned} \qquad (4)$$

Как видим, величины проекций в каждой точке пространства меняются со временем по гармоническому закону. Чтобы найти, какую траекторию описывает конец вектора $\vec{E}^r$, исключим в выражениях (4) время t. Для этого представим выражение (4) в виде

$$\mathcal{E}^r_\xi/\mathcal{E}_{\|} = \cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\cos\delta_{\|} - \sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\sin\delta_{\|}; \qquad (5)$$

$$\mathcal{E}^r_\eta/\mathcal{E}_{\perp} = \cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\cos\delta_{\perp} - \sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\sin\delta_{\perp}. \qquad (6)$$

Умножив уравнение (5) на $\cos\delta_{\perp}$, а уравнение (6) на $\cos\delta_{\|}$, вычтем

одно из другого и получим

$$\frac{\mathcal{E}_\xi^r}{\mathcal{E}_\parallel}\cos\delta_\perp - \frac{\mathcal{E}_\eta^r}{\mathcal{E}_\perp}\cos\delta_\parallel = -\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\sin(\delta_\parallel-\delta_\perp). \qquad (7)$$

Аналогично, исключая $\sin(\vec{k}\vec{r}-\omega t)$ из уравнений (5) и (6), получаем

$$\frac{\mathcal{E}_\xi^r}{\mathcal{E}_\parallel}\sin\delta_\perp - \frac{\mathcal{E}_\eta^r}{\mathcal{E}_\perp}\sin\delta_\parallel = -\cos(\vec{k}\vec{r}-\omega t)\sin(\delta_\parallel-\delta_\perp). \qquad (8)$$

Возведя в квадрат обе части уравнений (7), (8) и сложив их, получаем

$$\left(\frac{\mathcal{E}_\xi^r}{\mathcal{E}_\parallel}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_\eta^r}{\mathcal{E}_\perp}\right)^2 - 2\frac{\mathcal{E}_\xi^r\mathcal{E}_\eta^r}{\mathcal{E}_\parallel\mathcal{E}_\perp}\cos(\delta_\parallel-\delta_\perp) = \sin^2(\delta_\parallel-\delta_\perp). \qquad (9)$$

В общем случае это уравнение эллипса с главными осями, повернутыми относительно осей ξ, η на некоторый угол. Значит, конец вектора, вращаясь, описывает эллипс. Такую волну называют эллиптически поляризованной.

Если сдвиг фаз $\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp = \frac{\pi}{2}$ и $\mathcal{E}_\parallel = \mathcal{E}_\perp = \mathcal{E}$, эллипс превращается в окружность

$$\left(\frac{\mathcal{E}_\xi^r}{\mathcal{E}}\right)^2 + \left(\frac{\mathcal{E}_\eta^r}{\mathcal{E}}\right)^2 = 1$$

и поляризация будет круговой. Найдем, какой величины должен быть показатель преломления диэлектрической среды, чтобы мог осуществиться сдвиг фаз $\delta = \frac{\pi}{2}$.

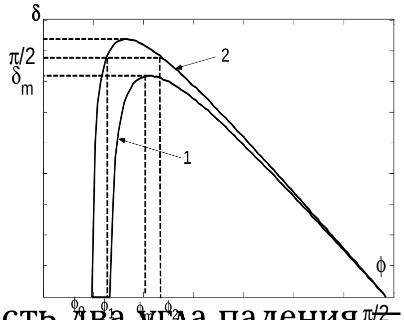
С помощью формул (2) найдем

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\varphi\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\sin^2\varphi}. \qquad (10)$$

При полном отражении угол φ меняется от φ_0, определяемом из уравнения $\sin\varphi_0 = n$, до $\pi/2$. При этом из соотношения (10) видно, что

на концах этого интервала $\delta = 0$, а внутри — положительная функция. Значит, внутри интервала $[\varphi = \varphi_0, \quad \varphi = \pi/2]$ $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, а с ним и δ достигает максимума.

Максимальный сдвиг δ_m для конкретного диэлектрика может и не



достигать значения $\pi/2$ ни при каком угле падения. Тогда на таком диэлектрике нельзя получить круговую поляризацию для отраженной волны (см. рисунок, кривая 1). В то же время, если $\delta_m > \pi/2$, то есть два угла падения φ_1, φ_2 — для данного диэлектрика, при которых сдвиг фаз равен $\pi/2$ (кривая 2).

Найдем из уравнения (10) угол $\varphi = \varphi_m$, при котором δ достигает значения δ_m, а затем, подставляя $\cos\varphi_m$ и $\sin\varphi_m$ в это уравнение и приравнивая δ_m значению $\pi/2$, находим условие для n.

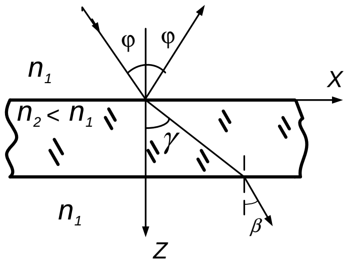
Чтобы найти угол φ_m, достаточно от правой части уравнения (10) взять производную по φ и приравнять ее нулю. Опустив простые выкладки, напишем результат:

$$\cos\varphi_m = \left(\frac{1-n^2}{1+n^2}\right)^{1/2}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_m}{2} = \frac{1-n^2}{2n}, \quad n = \frac{n_2}{n_1},$$

откуда $(1-n^2)/2n = tg(\pi/4) = 1$ и, значит, $n = \sqrt{2} - 1 = 0,414$. Среда 2 оптически менее плотная $n_2 < n_1$. В справочниках, как правило, даются показатели преломления n' веществ относительно вакуума. Считая вторую среду вакуумом, для показателя преломления первой среды n_1' получаем условие $n_1' = 1/n_1 > 1/0,414 = 2,41$.

Р.8. Луч света падает на поверхность плоскопараллельной пластинки толщиной d под углом φ, большим угла полного внутреннего отражения. Найти интенсивность света, прошедшего через пластинку. Электрическое поле волны параллельно поверхности пластинки.

Поскольку электрическое поле параллельно поверхности пластин-



ки, то можно считать, что оно направлено по оси Y (см. рисунок), т. е. существует только одна составляющая поля, перпендикулярная плоскости падения (z, x). Обозначим диэлектрические проницаемости среды и пластинки соответственно ε_1 и ε_2. Магнитные проницаемости положим $\mu_1 = \mu_2 = 1$. Падающую ℓ, отраженную r и прошедшую d через пластинку волны запишем в следующем виде:

$$E^\ell = E_0^\ell e^{i(\omega t - k_1 x \sin\varphi - k_1 z \cos\varphi)}, \quad z \le 0,$$
$$E^r = Re^{i(\omega t - k_1 x \sin\varphi + k_1 z \cos\varphi)}, \quad z \le 0,$$
$$E^d = Re^{i(\omega t - k_1 x \sin\beta - k_1 z \cos\beta)}, \quad z \ge 0.$$

Поле внутри пластинки (см. задачи Р. 1, Р. 4)

$$E_2 = A_1 e^{i(\omega t - k_2 x \sin\gamma - k_2 z \cos\gamma)} + A_2 e^{i(\omega t - k_2 x \sin\gamma + k_2 z \cos\gamma)}, \quad 0 \le z \le d.$$

Для всех волн $\vec{H} = \frac{c}{\omega}[\vec{k} \times \vec{E}]$, k_1 — значение волнового вектора волн в среде, k_2 — в слое. Обозначения углов понятны из рисунка. Из граничных условий для $\vec{E}$, $\vec{H}$ на верхней границе пластинки $z = 0$ следует

$$E_0^\ell e^{i(\omega t - k_1 x \sin\varphi)} + Re^{i(\omega t - k_1 x \sin\varphi)} = A_1 e^{i(\omega t - k_2 x \sin\gamma)} + A_2 e^{i(\omega t - k_2 x \sin\gamma)},$$

или с учетом $k_1 \sin\varphi = k_2 \sin\gamma$

$$E_0^\ell + R = A_1 + A_2; \tag{1}$$

$$k_1 \cos\varphi (E_0^\ell - R) = k_2 \cos\gamma (A_1 - A_2). \tag{2}$$

При $z = d$ граничные условия дают

$$A_1 e^{-ik_2 d \cos\gamma} + A_2 e^{ik_2 d \cos\gamma} = De^{-ik_1 d \cos\varphi}; \tag{3}$$

$$k_2 \cos\gamma (A_1 e^{-ik_2 d \cos\gamma} - A_2 e^{ik_2 d \cos\gamma}) = k_1 D \cos\varphi e^{-ik_1 d \cos\varphi}. \tag{4}$$

При написании условий (3), (4) использовано $\beta = \varphi$, потому что $k_1 \sin\varphi = k_2 \sin\gamma = k_1 \sin\beta$. Из уравнений (1)–(4) после несложных преобразований найдем

$$\frac{D}{E_0^\ell} = \frac{2id\varkappa e^{i\alpha d}}{(\varkappa^2 - \alpha^2)\operatorname{sh}\varkappa d + 2i\alpha\varkappa \operatorname{ch}\varkappa d}.$$

Здесь введены обозначения

$$\alpha = k_1 \cos\varphi = \frac{\omega}{c} n_1 \cos\varphi,$$

$$\varkappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2 \sin^2\varphi - n_2^2}.$$

Поскольку $n_2 < n_1$, то

$$k_2 \cos\gamma = \frac{\omega}{c} n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\varphi} = i\frac{\omega}{c}\sqrt{n_1^2 \sin^2\varphi - n_2^2},$$

т. е. $k_2 \cos\gamma = i\varkappa$. Если пластинка — это вакуумный слой, а у среды диэлектрическая проницаемость ε, то $n_1^2 = \varepsilon$, $n_2^2 = 1$ и

$$\varkappa = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon \sin^2\varphi - 1}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi.$$

Интенсивность света, прошедшего через слой, найдем (см. задачу Р. 4) из

$$\frac{I}{I_0} = \frac{|D|^2}{|E_0^\ell|^2} = \frac{|2i\alpha\varkappa e^{i\alpha d}|^2}{|(\varkappa^2 - \alpha^2)\operatorname{sh}\varkappa d + 2i\alpha\varkappa \operatorname{ch}\varkappa d|^2} =$$

$$= \frac{4\varkappa^2\alpha^2}{4\varkappa^2\alpha^2 \operatorname{ch}^2\varkappa d + (\varkappa^2 - \alpha^2)\operatorname{sh}^2\varkappa d}.$$

Окончательно

$$I = I_0/[\operatorname{ch}^2\varkappa d + (\frac{\varkappa^2 - \alpha^2}{2\varkappa\alpha})^2 \operatorname{sh}^2\varkappa d].$$

Р.9. Плоская монохроматическая линейно поляризованная волна падает по нормали на проводящую бесконечно тонкую пластину, для которой имеет место закон Ома $\vec{j} = \sigma\vec{E}$, где $\vec{j}$ — ток через единицу длины, а σ — соответствующая проводимость. Найти коэффициент прохождения волны.

Пусть проводящая поверхность будет плоскостью (X, Y). Поскольку волна падает по нормали, то напряженность электрического поля $\vec{E}$ лежит в плоскости (X, Y) и, не умаляя общности, ось X можно направить вдоль $\vec{E}$. Тогда магнитное поле будет направлено по оси Y. Граничные условия в этой ситуации будут следующими: тангенциальная составляющая напряженности электрического поля остается непрерывной, тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля $\vec{H}$ (что следует из третьего уравнения системы уравнений Максвела задачи Р. 1) будет терпеть разрыв $H_{1y}| - H_{2y}| = \frac{4\pi}{c}j$, потому что по проводящей поверхности вдоль оси X потекут токи $j = \sigma E$.

Если обозначить значками ℓ, r, d соответственно падающую, отраженную и прошедшую волны, то граничные условия (см. задачи Р. 2, Р. 4) будут иметь вид

$$E^\ell + E^r = E^d,$$

$$E^\ell - E^r - E^d = \frac{4\pi\sigma}{c}(E^\ell + E^r),$$

откуда

$$\frac{|E^d|^2}{|E^\ell|^2} = \frac{1}{(1 + 2\pi\sigma/c)^2}.$$

Р.10. Найти радиус кривизны светового луча при его распространении в прозрачной среде с медленно меняющимся показателем преломления n.

Решением волнового уравнения, описывающего распространение электромагнитной волны в среде с показателем преломления n,

зависящим от координат, уже не будут плоские волны. Обязательным свойством плоской волны является наличие факта, что поверхностью постоянной фазы, называемой волновой поверхностью, является плоскость бесконечной протяженности. Скорость движения волновой поверхности и амплитуда такой волны остаются постоянными в пространстве и во времени, а волновой вектор, определяющий направление распространения волны, направлен перпендикулярно волновой поверхности.

При распространении волны в среде, коэффициент преломления которой непрерывно меняется от точки к точке, разные части волнового фронта будут распространяться с разными скоростями, что приведет к его деформации. Однако в случае медленно изменяющегося показателя преломления волну можно рассматривать как плоскую в каждом небольшом участке пространства и говорить о направлении распространении волны, нормальном к волновой поверхности. При этом вводится понятие лучей, которые являются линиями, ортогональными к поверхностям одинаковых фаз. Касательные к лучам в каждой точке совпадают с направлением распространения волны. Как показывает анализ, такой подход допустим, если средний радиус кривизны волновой поверхности велик по сравнению с длиной волны, что для видимого света с длиной волны $\lambda = 10^{-5}$см выполняется.

Пусть S — длина дуги луча, отсчитываемая от некоторой точки вдоль луча, а $\vec{S}$ — единичный вектор касательной к лучу, тогда

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} = \vec{S}\cdot \operatorname{grad} n.$$

Умножая обе части этого равенства на вектор $\vec{S}$ и используя

$$\vec{S}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}(n\vec{S})}{\mathrm{d}S} - n\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}S},$$

получаем

$$n\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}(n\vec{S})}{dS} - (\vec{S}\cdot \operatorname{grad} n)\vec{S}. \qquad (1)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что $d\vec{S}/dS = \vec{N}/\rho$, где $\vec{N}$ — единичный вектор главной нормали к лучу, а ρ — радиус кривизны луча. Умножим векторное равенство (1) скалярно на $\vec{N}$ и, учитывая, что $\vec{N}$ перпендикулярен $\vec{S}$, получаем

$$\frac{n}{\rho} = \vec{N}\frac{\mathrm{d}(n\vec{S})}{\mathrm{d}S}. \tag{2}$$

Покажем, что $\mathrm{d}(n\vec{S})/\mathrm{d}S = \mathrm{grad}\, n$. Согласно принципу Ферма, интеграл от показателя преломления вдоль траектории луча между двумя точками пространства A и B, называемый оптической длиной, $\int_A^B n\mathrm{d}S$, минимален. Тогда вариация этого интеграла равна нулю. Записывая вариацию интеграла в виде $\int_A^B \delta n\mathrm{d}S + n\delta\mathrm{d}S$ и используя соотношения $\delta n = \delta\vec{n}\,\mathrm{grad}\, n$, $\delta\mathrm{d}S = \vec{S}\mathrm{d}\delta\vec{r}$, где $\delta\vec{r}$ — смещение траектории луча при варьировании, получаем для вариации оптической длины выражение

$$\int_A^B \delta\vec{r}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{d}S + \int_A^B n\vec{S}\mathrm{d}\delta\vec{r}.$$

Проинтегрируем по частям второе слагаемое с учетом, что в точках A и B $\delta\vec{r} = 0$ и, приравняв вариацию оптической длины нулю, получим

$$\int_A^B (\mathrm{grad}\, n - \frac{\mathrm{d}(n\vec{S})}{\mathrm{d}S})\delta\vec{r}\cdot\mathrm{d}S = 0.$$

Отсюда $\mathrm{d}(n\vec{S})/\mathrm{d}S = \mathrm{grad}\, n$, а равенство (2) примет вид

$$\frac{n}{\rho} = \vec{N}\cdot\mathrm{grad}n = \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}N}$$

или

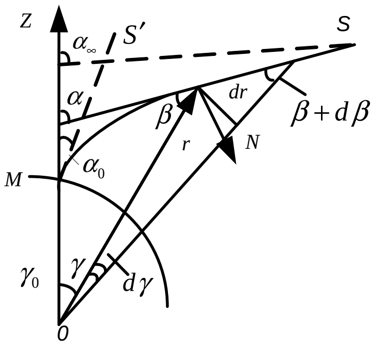
$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}N}.$$

Луч изгибается в сторону увеличения показателя преломления.

Р.11. Найти рефракцию $\alpha_\infty - \alpha_0$ с учетом кривизны земной поверхности, считая, что разность $n - 1$ пропорциональна плотности воздуха, и предполагая, что плотность воздуха меняется с высотой согласно

барометрической формуле (изометрическая атмосфера); α_∞ — угол, образуемый асимптотой к лучу с вертикалью места наблюдения, α_0 — видимое зенитное расстояние объекта, n — показатель преломления.

Уменьшение плотности атмосферы с высотой приводит к уменьшению с высотой показателя преломления. В результате этого луч, идущий к Земле от какой-либо звезды, проходя через атмосферу, изгибается. Поэтому видимое положение звезды S' смещено относительно ее истинного положения S (см. рисунок). Угловое смещение $\alpha_\infty - \alpha_0$ есть рефракция. Найдем рефракцию для наблюдателя, находящегося



в точке M. Поскольку показатель преломления атмосферы n зависит только от расстояния r от центра Земли, то световой луч AM будет лежать в вертикальной плоскости, проходящей через звезду и точку наблюдения. Обозначим через S длину луча, отсчитываемую от точки M, а через α — угол между вертикалью MZ и касательной к лучу (зенитное расстояние). Для плоской кривой радиус кривизны траектории ρ связан с изменением зенитного расстояния формулой

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}r}\cos\beta. \tag{1}$$

С другой стороны, из решения задачи Р. 10 $n/\rho = N \cdot \vec{\mathrm{grad}} n$. Поскольку n зависит только от r, то отсюда

$$\frac{1}{\rho} = (\vec{N}\vec{e_r})\frac{\mathrm{d}r}{n\mathrm{d}r} = -\sin\beta\frac{\mathrm{d}n}{n\mathrm{d}r} = -\sin\beta\frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}r},$$

где $\vec{e_r}$ — единичный вектор вдоль радиус-вектора $\vec{r}$. Уравнение (1) примет вид

$$\mathrm{d}\alpha/\operatorname{tg}\beta = -\mathrm{d}\ln n. \tag{2}$$

Найдем, как будет меняться угол β между касательной к лучу и радиусом r с изменением r. Поскольку $\alpha = \gamma + \beta$, то $\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}\gamma + \mathrm{d}\beta$.

Так как $\mathrm{d}\gamma = \operatorname{tg}\beta \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r}$, то $\operatorname{tg}\beta\frac{\mathrm{d}r}{r} + \mathrm{d}\beta = d\alpha$ и уравнение (2) запишется в виде $\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = -\mathrm{d}\ln n$ или $\frac{\mathrm{d}\beta}{\operatorname{tg}\beta} = -\mathrm{d}\ln(nr)$. Интегрирование этого уравнения дает $nr \cdot \sin\beta = \mathrm{const}$.

В точке M $\beta = \alpha_0$, $r = r_0$, $n = n_0$ и, значит, $\mathrm{const} = n_0 r_0 \sin\alpha_0$, где r_0 — радиус Земли. Окончательно закон преломления луча в атмосфере примет вид

$$nr\sin\beta = n_0 r_0 \sin\alpha_0. \qquad (3)$$

Отсюда

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{n_0 r_0 \sin\alpha_0}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0}}.$$

Подставляя $\operatorname{tg}\beta$ в уравнение (2), получаем выражение для рефракции

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = -n_0 r_0 \sin\alpha_0 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}r} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0}}. \qquad (4)$$

Упростим подынтегральное выражение. Показатель преломления n атмосферы меняется от $n_0 = 1,000293$ до 1, поэтому для всех r $n - 1 \ll 1$ и $\ln n = \ln(1 - (n-1)) \approx n - 1$. По условию задачи

$$n - 1 = \mathrm{const} \cdot \rho_0 e^{-\frac{\mu g (r - r_0)}{RT}},$$

где μ — молекулярный вес воздуха; R — газовая постоянная; T — абсолютная температура; ρ_0 — плотность воздуха на поверхности Земли. Тогда

$$\frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}(n-1)}{\mathrm{d}r} = -\frac{\mu g}{RT}\mathrm{const} \cdot \rho_0 e^{-\frac{\mu g (r - r_0)}{RT}} = -(n_0 - 1)\frac{\mu g}{RT}\rho_0 e^{-\frac{\mu g (r - r_0)}{RT}}$$

и

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = \frac{\mu g}{RT} n_0 r_0 \sin\alpha_0 \cdot (n_0 - 1) \int_{r_0}^{\infty} \frac{e^{-\frac{\mu g (r - r_0)}{RT}} \cdot \mathrm{d}r}{\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \sin^2\alpha_0}}. \qquad (5)$$

Наибольший вклад в интеграл дают области $r \approx r_0$. Учитывая слабую зависимость интеграла от n, подкоренное выражение можно заменить приближенным выражением

$$n^2r^2 - n_0^2r_0^2\sin^2\alpha^2 = n_0^2(r - r_0\sin\alpha_0)(r - r_0\sin\alpha_0) \approx$$

$$\approx h_0^2(1+\sin\alpha_0)(r - r_0\sin\alpha_0).$$

Введя новую переменную интегрирования $x = \sqrt{\frac{\mu g}{RT}(r - r_0\sin\alpha_0)}$ для рефракции, получим выражение

$$\alpha_\infty - \alpha_0 = 2(n_0-1)x_0\operatorname{tg}\alpha_0\int_{x_0}^{\infty} e^{-(x^2-x_0^2)}\mathrm{d}x,$$

где

$$x_0^2 = \frac{\mu g r_0}{RT}(1-\sin\alpha_0).$$

Если не учитывать кривизну земной поверхности, что допустимо, когда звезда находится не слишком близко к горизонту, то можно считать, что показатель преломления зависит от z. Тогда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}S} = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}z}\cos\alpha$$

и

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\vec{N}}{n}\mathrm{grad}n = (\vec{N}\vec{e_r})\frac{\mathrm{d}n}{n\mathrm{d}z} = \sin\alpha\frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}z}.$$

Исключая ρ, получаем $\mathrm{d}n/n = -\mathrm{d}\sin\alpha/\sin\alpha$, откуда $n\sin\alpha = \mathrm{const}$ и, значит,

$$\sin\alpha_\infty = n_0\sin\alpha_0, \quad (n_\infty = 1). \tag{6}$$

Вычтем из обеих частей последнего соотношения $\sin\alpha_0$, получим

$$\sin\alpha_\infty - \sin\alpha_0 = (n_0-1)\sin\alpha_0. \tag{7}$$

Левую часть можно представить как

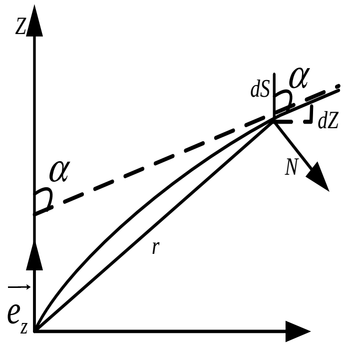
$$2\cos\frac{\alpha_\infty+\alpha_0}{2}\cdot\sin\frac{\alpha_\infty-\alpha_0}{2}.$$

Поскольку n_0 мало отличается от единицы, то из уравнения (6) следует, что α_∞ мало отличается от α_0 и, значит, $\alpha_\infty - \alpha_0 \ll 1$. Тогда $\sin\frac{\alpha_\infty-\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_\infty-\alpha_0}{2}$, а $\cos\frac{\alpha_\infty+\alpha_0}{2} \approx \cos\alpha_0$, и из формулы (7) найдем

$$\alpha_\infty - \alpha_0 \approx (n_0-1)\operatorname{tg}\alpha_0.$$

Интересно, что рефракция в этом случае не зависит от закона изменения показателя преломления с высотой, а зависит только от значения показателя преломления на поверхности Земли n_0 и видимого зенитного расстояния α_0.

Р.12. Насколько раньше мы видим восход Солнца из-за рефракции ($n_0 - 1 = 3\cdot 10^{-4}$, $T = 273K$, $g = 981$ см/с^2, $\mu = 29$ г/моль, $R = 8,3\cdot 10^7$ эрг/(моль$\cdot K$), $r_0 = 6,367\cdot 10^3$км) ?



Оценим рефракцию Солнца при восходе. В этом случае $\alpha_0 = 90^0$, и тогда формулу (5) предыдущей задачи можно представить в виде

$$\alpha_\infty-\alpha_0 = \frac{\mu g}{RT}n_0 r_0(n_0-1)\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{\mu g}{RT}(r-r_0)}\mathrm{d}r}{\sqrt{n^2r^2-n_0^2r^2}} =$$

$$= \frac{\mu g(n_0-1)}{RT}\left(\frac{r_0}{2}\right)^{1/2}\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{e^{-\mu g(r-r_0)}}{\sqrt{r-r_0}}\mathrm{d}r.$$

Положим

$$x = [\frac{\mu g}{RT}(r-r_0)]^{1/2},$$

тогда

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu g}{RT}\right)^{1/2}\frac{\mathrm{d}r}{(r-r_0)^{1/2}}$$

и

$$\triangle\alpha = \alpha_\infty - \alpha_0 = \left(\frac{2\mu g r_0}{RT}\right)^{1/2}(n_0-1)\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\pi\mu g r_0}{2RT}\right)^{1/2} (n_0 - 1) = 35'30''.$$

Солнце взойдет раньше на время Δt, равное времени, необходимому Земле для прохождения угла, равного углу рефракции, при суточном вращении Земли

$$\Delta t = \frac{\Delta\alpha}{\omega} = \frac{35,5' \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{360 \cdot 60} c = 142c,$$

где ω — угловая скорость вращения Земли.

2. ВОЛНЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Разложение в интеграл Фурье по плоским монохроматическим волнам:

$$f(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f_{\vec{k},\omega} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \mathrm{d}^3 k \, \mathrm{d}\omega, \tag{1}$$

где

$$f_{\vec{k},\omega} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int f(\vec{r}, t) e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}t.$$

Разложение по монохроматическим волнам (спектральное разложение):

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(\omega) e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega, \tag{2}$$

где

$$f(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(t) e^{i\omega t} \mathrm{d}t \text{ — спектр волны.}$$

Разложение по плоским волнам:

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int f(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}} \mathrm{d}^3 k. \tag{3}$$

Фазовая скорость $\vec{v}_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k^2}\vec{k}$, групповая скорость $\vec{v}_{\text{гр}} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}\vec{k}$.
Соотношения неопределенностей:

$$\begin{aligned} \Delta\omega\Delta t &\gtrsim 2\pi, \\ \Delta k_x \Delta x &\gtrsim 2\pi, \\ \Delta k_y \Delta y &\gtrsim 2\pi, \\ \Delta k_z \Delta z &\gtrsim 2\pi. \end{aligned} \tag{4}$$

Условие применимости приближения геометрической оптики:

$$\theta_{\text{дифр}} = \lambda/d \ll 1.$$

В прямоугольном волноводе со сторонами a и $b \leq a$ волна распространяется вдоль оси z. Тогда для E-волны $(H_z = 0)$ компонента поля E_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta_2 E_z + \varkappa^2 E_z = 0, \tag{5}$$

где $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, а $\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k^2 = \frac{\omega^2\varepsilon^2\mu^2}{c^2} - k^2$. Граничные условия $B_n| = 0$ и $E_\tau| = 0$. Решение уравнения (5) с приведенными граничными условиями имеет вид

$$E_z = E_0 \sin\frac{\pi m}{a}x \cdot \sin\frac{\pi n}{b}y \cdot e^{i(kz-\omega t)}, \;\; m, n = 1, 2, 3... \tag{6}$$

$$\omega_{min} = \frac{\pi c}{ab\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{a^2+b^2}, \;\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}.$$

Из уравнений Максвелла для E-волны (TH-волны) следует

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{ik}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad E_y = \frac{ik}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \\ H_x &= -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\varkappa^2 = (\omega^2/c^2) - k^2$.

Для H-волны (TE-волны) имеем

$$\Delta_2 H_z + \varkappa^2 H_z = 0. \qquad (8)$$

Решение этого уравнения с теми же граничными условиями имеет вид

$$H_z = H_0 \cos\frac{\pi m}{a}x \cdot \cos\frac{\pi n}{b}y \cdot e^{i(kz-\omega t)}, \;\; m, n = 1, 2, 3... \qquad (9)$$

$$\omega_{min} = \frac{\pi c}{a\sqrt{\varepsilon\mu}}, \;\; \omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}.$$

Для остальных компонент из уравнений Максвелла имеем соотношения

$$H_x = \frac{ik}{\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}\;, \;\; H_y = \frac{ik}{\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y},$$
$$E_x = \frac{i\mu\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}\;, \;\; E_y = -\frac{i\mu\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \qquad (10)$$

Поле в резонаторе-параллелепипеде со сторонами $a \geq b \geq d$ имеет вид

$$\begin{aligned} E_x &= E_1 \sin\frac{\pi m}{a}x \cdot \sin\frac{\pi n}{b}y \cdot \cos\frac{\pi l}{d}z \cdot e^{-i\omega t}, \\ E_y &= E_2 \sin\frac{\pi m}{a}x \cdot \cos\frac{\pi n}{b}y \cdot \sin\frac{\pi l}{d}z \cdot e^{-i\omega t}, \qquad (11) \\ E_z &= E_3 \cos\frac{\pi m}{a}x \cdot \sin\frac{\pi n}{b}y \cdot \sin\frac{\pi l}{d}z \cdot e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

где $n, m, l = 0, 1, 2...$, $\frac{\omega^2}{c^2} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{l^2}{d^2}\right)$, $\omega_{min} = \pi c\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$. На стенках возникают конечные токи и конечные плотности зарядов, несмотря на очень большую проводимость.

2.1. Фурье-разложение

2.1. Найти спектр двух сигналов, состоящих из двух синусоид: 1)$y_1 = \sin(\omega t)$ и $y_2 = 2\sin(3\omega t)$ и 2) $y_1 = \sin(\omega t)$ и $y_2 = 2\sin(3\omega t + \frac{\pi}{4})$.

2.2. Найти спектры следующих сигналов:

а)$f(t) = \cos(\omega_0 t)$[1];

б)$f(t) = \exp(-\beta^2 t^2)$;

в) $f(t) = 0$ при $|t| > \frac{\tau}{2}$ и $f(t) = 1$ при $|t| \leq \frac{\tau}{2}$;

г) $f(t) = 0$ при $t > \frac{\tau}{2}$ и $f(t) = \cos(\frac{\pi t}{\tau})$ при $|t| \leq \frac{\tau}{2}$;

д) $f(t) = 0$ при $|t| > \frac{\tau}{2}$, $1 + 2\frac{t}{\tau}$ при $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq 0$ и $1 - 2\frac{t}{\tau}$ при $t \leq \frac{\tau}{2}$.

2.3. Записать уравнения Максвелла относительно компонент Фурье полей и потенциалов в однородной изотропной диспергирующей среде (при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны).

2.4. Найти связь между компонентами Фурье полей и потенциалов (при разложении на монохроматические, плоские и плоские монохроматические волны).

2.5. а) Разложить по плоским волнам кулоновский потенциал неподвижного точечного заряда; б) то же для векторного потенциала прямого тока J (плотность тока $J = j\delta(x)\delta(y)$).

2.6. а) Разложить по плоским волнам поле $\vec{E}$ неподвижного точечного заряда; б) то же для поля $\vec{H}$ поля прямого тока J .

2.7. Точечный заряд движется в вакууме равномерно и прямолинейно. Разложить его поля и потенциалы на плоские монохроматические волны.

2.8. Доказать равенства Парсеваля для монохроматических и плоских волн соответственно:

---

[1] Здесь и далее используется следующая форма прямого и обратного преобразования Фурье соответственно: $f_\omega = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{i\omega t} \mathrm{d}t$, $f(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\omega e^{-i\omega t} \mathrm{d}\omega$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt = 4\pi \int\limits_{0}^{+\infty} |f\omega|^2 d\omega, \ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^2(\vec{r},t)d\vec{r} = (2\pi)^3 \int |f_{\vec{k}}|^2 d\vec{k}.$$

2.2. Волновой пакет. Фазовая и групповая скорости. Дисперсия

2.9. Найти групповую скорость волнового пакета, состоящего из двух плоских волн с близкими частотами $\omega_0 \pm \Delta\omega$, распространяющихся в диспергирующей среде.

2.10. Найти волновой пакет для момента времени $t = 0$, если его амплитудная функция имеет гауссовский вид

$$a(k) = a_0 \exp\left\{-\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2\right\}.$$

2.11. Определить форму и движение волнового пакета, состоящего из плоских волн одинаковой амплитуды и с волновыми векторами, лежащими в области $|\vec{k_0}-\vec{k}|\leq q$. Дисперсия среды линейна: $\omega(k) = \omega(k_0) + \frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0} \cdot (|\vec{k} - \vec{k_0}|)$.

2.12. Построить для момента $t = 0$ одномерный волновой пакет, амплитудная функция которого имеет вид

$$\psi(k) = \delta(k-k_0) \cdot \begin{cases} 1 & \text{при} \ \ 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ 0 & \text{при} \ \ \ \ \theta > \theta_0 \end{cases}$$

для всех $\alpha \in [0, 2\pi]$

2.13. Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета с гауссовской амплитудной кривой $a(k) = a_0 exp\{-\alpha(k-k_0)^2\}$, учитывая и квадратичные члены в дисперсии.

2.14. Волновой пакет длиной Δx_0 входит в среду с дисперсией

$$\omega(k) = \omega_0 + v_g \cdot (k-k_0) + \frac{a^2}{2}(k-k_0)^2.$$

Оценить его размер после прохождения слоя толщиной d.

2.15. Найти закон движения для пакета $E(x,0) = E_0 e^{-\frac{x^2}{l_0^2}} e^{ikx}$ при

$$l_0 = \begin{cases} l_1 & \text{при } x < 0, \\ l_2 & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

в среде с дисперсией $\omega(k) = \omega_0 + v_{\text{гр}} \cdot (k - k_0) + a^2(k_0 - k)^2$. Рассмотреть случаи $l_1 < l_2$ и $l_1 > l_2$.

2.16. Указать пример сжимающегося волнового пакета. Проанализировать стадии его деформации. Существует ли предельный размер сжатия?

2.17. Вывести формулу Рэлея для связи групповой и фазовой скоростей через $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}$, а также через $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}$.

2.18. Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсии (v — фазовая скорость): а) $v = \mathrm{const}$ — звук в воздухе; б) $v = a\sqrt{\lambda}$ — гравитационные волны на воде; в) $v = a/\sqrt{\lambda}$ — капиллярные волны; г) $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2}$ — электромагнитные волны в ионосфере (c — скорость света; λ — длина волны в среде);
д) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}$ — электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$; c — скорость света в вакууме, α — геометрический фактор волновода.

2.19. Найти фазовую и групповую скорости волн в среде, диэлектрическая проницаемость которой имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$ где ω_p и ω_0 — константы. Ограничиться случаями $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$, $(\mu = 1)$.

2.20. Рассмотреть диэлектрик, для которого $n = 1 + \frac{\beta^2}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}$.
а) Вычислить фазовую и групповую скорости для $\omega = 10^{14}, 10^{15}, 10^{16}$ Гц при $\omega_0 = \beta = 10^{16}$, $\gamma = 10^6$ (значение величин в герцах). б) Определить время, необходимое для удвоения ширины минимизирующего пакета с $\Delta x = 10^{-12}$ см, и расстояние, на которое сместится пакет за это время.

2.3. Соотношение неопределенностей

2.21. Найти величину произведения $\Delta t \cdot \Delta f$ для сигналов и их спектров из задачи 2.2.

2.22. Пользуясь соотношением неопределенностей, найти минимально возможный размер объекта при наблюдении его в микроскоп в отраженном свете с длиной волны λ.

2.23. С какой предельной точностью можно провести радиолокационное определение положения объекта, находящегося на расстоянии l, если используется излучение с длиной волны λ?

2.24. Пользуясь соотношением неопределенностей, оценить размер области, в которой применимо понятие луча в оптике.

2.25. Оценить диаметр отверстия камеры-обскуры длиной ℓ, при котором изображение получится самым резким (длина волны λ).

2.26. Плоская волна падает на щель в экране шириной d, образуя угол θ с нормалью к плоскости экрана. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину световой полосы на втором экране, расположенном на расстоянии ℓ от первого. Длина волны λ.

2.27. Оценить минимальный размер светового пятна на Луне от луча лазера, расположенного на Земле (длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^3$ Å).

2.28. Используя соотношения неопределенностей, оценить размер пятна на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы (фокусное расстояние F) диаметра d, собравшую параллельный пучок лазерного света с длиной волны λ, падающего на линзу вдоль ее главной оптической оси.

2.29. Используя соотношение неопределенностей и вводя размер своего зрачка d, оценить: в виде кружка или яркой звезды Вы увидели бы Солнце с орбиты Плутона ($\ell_{\text{средн}} \sim 6 \cdot 10^9$км). Угловой размер Солнца на Земле $\theta_{\odot} \simeq 0,01$, расстояние между Солнцем и Землей $\ell_{\odot} = 1,5 \cdot 10^8$ км. Средняя длина световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см.

2.30. Оценить максимальную длину волн, на которых возможны: а) радиовещание; б) телевидение.

2.4. Волноводы и резонаторы[2]

2.31. Показать, что в идеальный проводник электромагнитная волна не проникает, и вывести граничные условия для векторов поля электромагнитной волны на границе с идеальным проводником.

2.32. Найти связь между поперечными компонентами полей и продольной составляющей электрического поля E_z для монохроматической Е-волны (или ТМ-волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода. Найти уравнение для составляющей поля E_z. То же для Н-волны (или ТЕ-волны).

2.33. Показать, что для Е-волны (Н-волны), распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода, граничные условия для полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ выполнены, если на стенках волновода $E_z = 0$ $(\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0)$.

2.34. Определить Е-волны (Н-волны), которые могут распространяться вдоль пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$. Найти критическую (наименьшую) частоту этих волн.

2.35. Найти распределение тока в стенках пустого волновода прямоугольного сечения $a \times b$, в котором распространяется E_{11}-волна (H_{10}-волна).

2.36. На какой волне должен работать излучатель, чтобы возбудить один тип волны в прямоугольном волноводе с $a = 5$ см, $b = 3$ см?

2.37. Определить фазовую и групповую скорости волн в волноводе геометрическим методом (на примере H_{10}-волн в прямоугольном волноводе).

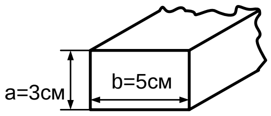
[2]В задачах этого параграфа стенки волноводов и резонаторов (кроме оговоренных случаев) предполагаются идеально проводящими.

2.38. Показать, что бесконечно протяженный диэлектрический слой с проницаемостями ε и μ, заполняющий в вакууме область $-a \leq x \leq a$, действует как волновод. Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе (ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y).

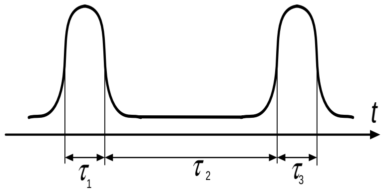
2.39. На вход в волновод подается сигнал $E(t)\cos(\omega_* t)$, где частотный спектр функции $E(t)$ — в пределах $(0, \omega_0)$, а ω_* — критическая частота волновода. Найти границы спектра на выходе волновода.

2.40. Оценить изменение амплитуды электрического поля электромагнитной волны, запущенной вдоль оси линейно расширяющегося волновода, с частотой много больше критической.

2.41. Оценить скорость расплывания прямоугольного импульса длительностью $\tau \sim 10^{-9}$ с, запущенного в пустой волновод прямоугольного сечения $3 \cdot 5$см^2.



2.42. СВЧ-сигнал с несущей частотой $\omega = 1,2{\cdot}10^{11}c^{-1}$ представляет собой два всплеска (см. рисунок) с $\tau_1 \simeq 10^{-9}$ с и $\tau_2 \simeq 5 \cdot 10^{-9}$ с. Этот сигнал передается в виде H_{10}-волны по прямоугольному волноводу с сечением $a \times b = 1$см $\times$ 2см. Оценить, при какой длине волновода еще можно на выходе зарегистрировать этот сигнал?



2.43. Оценить длину затухания E_{11}-волны с частотой $\omega = 1,4 \cdot 10^{11}\ c^{-1}$ в медном волноводе квадратного сечения ($a = 1$ см). Проводимость меди $\sigma = 5 \cdot 10^{17} c^{-1}$.

2.44. Определить собственные электромагнитные колебания в полом ($\varepsilon = \mu = 1$) резонаторе, имеющем форму параллелепипеда с ребрами $a \times b \times c$.

2.45. Определить минимальную частоту собственных колебаний

электромагнитного поля внутри резонатора из задачи 2.44 с размерами $1 \times 10 \times 20\,\text{см}^3$.

2.46. Показать, что для любого собственного электромагнитного колебания в полом резонаторе средние энергии электрического и магнитного полей равны.

2.47. В резонаторе, имеющем форму куба с ребром a, возбуждена основная мода колебаний, в которой отлична от нуля x-компонента электрического поля. Найти величину и направление сил, действующих на стенки резонатора, если полная энергия электромагнитного поля в резонаторе равна W.

2.5. Решение типичных задач

Р.13. Найти групповую скорость волнового пакета, состоящего из двух плоских волн с близкими частотами $\omega_0 \pm \Delta\omega$, распространяющихся в диспергирующей среде.

Пусть в направлении оси Z распространяются две плоские волны с одинаковой поляризацией, одинаковой амплитудой E_0 и различными частотами $\omega_1 = \omega_0 - \Delta\omega$, $\omega_2 = \omega_0 + \Delta\omega$. Волновые числа равны k_1 и k_2 соответственно. Напряженность результирующего поля равна сумме напряженностей обеих волн в силу принципа суперпозиции

$$E = E_0 \cos(\omega_1 t + k_1 z) + E_0 \cos(\omega_2 t - k_2 z + \alpha) =$$

$$= 2E_0 \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}z + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t - \frac{k_2 + k_1}{2}z + \frac{\alpha}{2}\right). \tag{1}$$

Каждая из волн является решением волнового уравнения, для которой $k = \frac{\omega}{c}n$, где n — показатель преломления среды. Если среда обладает дисперсией, тогда показатель преломления n зависит от частоты и естественно предположить, что $n_1 = n_0 - \Delta n_1$, $n_2 = n_0 + \Delta n_2$

(n_0 — показатель преломления при частоте ω_0), $\Delta n_1 \approx \Delta n_2 = \Delta n$, $\Delta n << n_0$, так как $\Delta\omega << \omega_0$. Тогда, отбрасывая величины второго порядка малости, получаем $\frac{\omega_2-\omega_1}{2} = \Delta\omega$, $\frac{\omega_1+\omega_2}{2} = \omega_0$, $\frac{k_1+k_2}{2} = \frac{n_0\omega_0}{2} = k_0$, $\frac{k_2-k_1}{2} \approx \frac{n_0\Delta\omega}{c} + \frac{\Delta n\omega_0}{c} = \Delta k$ и выражение (1) примет вид

$$E = 2E_0 \cos\left(\Delta\omega t - \Delta k z + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(\omega_0 t - k_0 z + \frac{\alpha}{2}\right). \qquad (2)$$

Эту результирующую волну можно рассматривать как волну с частотой ω_0 и волновым числом k_0, но с медленно и притом непериодически меняющейся амплитудой $A = 2E_0\cos(\Delta\omega t - \Delta k z + \frac{\alpha}{2})$. Волна (2), строго говоря, уже не будет гармонической, но при $\Delta\omega << \omega_0$ и $\Delta k << k_0$ изменение модулированной амплитуды A в пространстве и во времени происходит за период $T_A = 2\pi/\Delta\omega$ и на длине $\lambda_A = 2\pi/\Delta k$, которые много больше периода $T_0 = 2\pi/\omega_0$ и длины волны $\lambda_0 = 2\pi/k_0$ соответственно. Для определения скорости перемещения фазы волны (2) выберем какое-нибудь значение фазы, положив

$$\omega_0 t - k_0 z + \frac{\alpha}{2} = \mathrm{const}. \qquad (3)$$

Переписывая выражение (3) в виде

$$z = \frac{2\,\mathrm{const} + \alpha}{2k_0} + \frac{\omega_0}{k_0}t,$$

заключаем, что точка, где находится значение выбранной нами фазы, движется со скоростью $v = \omega_0/k_0$. Чему равна скорость перемещения данного значения амплитуды? Амплитуда A будет постоянной, если постоянен аргумент под косинусом в A, т. е.

$$\Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot z + \frac{\alpha}{2} = \mathrm{const},$$

или

$$z = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}t + \alpha - \frac{2\,\mathrm{const}}{2\Delta k}.$$

Отсюда видно, что точка, где находится значение выбранной амплитуды, движется со скоростью $v = \Delta\omega/\Delta k$, называемой групповой скоростью.

Р.14. Найти волновой пакет для момента времени $t = 0$, если его амплитудная функция имеет гауссовский вид

$$a(k) = a_0 \exp\left[-\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2\right].$$

Волновой пакет — это результирующее поле, полученное путем наложения гармонических волн с непрерывно меняющимся волновым вектором $\vec{k}$. В нашем случае закон изменения k дается в условии задачи выражением $a(k)$, поэтому

$$E(z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(\omega t - kz)} \mathrm{d}k.$$

При $t = 0$ имеем

$$E(z,0) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{-ikz} \mathrm{d}k = a_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{k-k_0}{\Delta k}\right)^2 - ikz} \mathrm{d}k. \quad (1)$$

Делая в уравнении (1) замену

$$\xi = \frac{k-k_0}{\Delta k} + i\frac{\Delta k z}{2},$$

получаем

$$E(z,0) = a_0 e^{-ik_0 z} e^{-z^2 \Delta k^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = a_0 \Delta k \sqrt{\pi} e^{\frac{-z^2 \Delta k^2}{4}} e^{-ik_0 z}.$$

Р.15. Определить форму и движение волнового пакета, состоящего из плоских волн одинаковой амплитуды a_0 и с волновыми векторами, лежащими в области $|\vec{k} - \vec{k_0}| \le q$. Дисперсия среды линейна

$$\omega(\vec{k}) = \omega_0(\vec{k_0}) + \left.\frac{\partial \omega}{\partial \vec{k}}\right|_{\vec{k}=\vec{k_0}} (\vec{k} - \vec{k_0}),$$

$\vec{k_0}$, q — постоянные.

Выражение $\left.\frac{\partial\omega}{\partial\vec{k}}\right|_{\vec{k}=\vec{k_0}}$ — это вектор с компонентами $\left.\frac{\partial\omega}{\partial k_x}\right|, \left.\frac{\partial\omega}{\partial k_y}\right|, \left.\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\right|$. Тогда зависимость частоты ω от $\vec{k}$ будет

$$\omega(\vec{k}) \cong \omega_0 + u_x(k_x - k_{0x}) + u_y(k_y - k_{0y}) + u_z(k_z - k_{0z}), \qquad (1)$$

где $\omega_0 = \omega(k_0)$. Сложная зависимость ω от k возникает в связи с тем, что диэлектрическая проницаемость вещества, а с ней и показатель преломления n зависят от частоты волны или от k. Для каждой плоской волны выполняется соотношение $\omega = \frac{ck}{n(k)}$. Видом этой функции определяется закон дисперсии волны. Учтем, что в нашем случае дисперсия среды линейна. Тогда волновой пакет, являющийся суперпозицией плоских волн с одинаковыми амплитудами a_0 и различными частотами, удовлетворяющими соотношению (1), запишется так:

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \int e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})}\mathrm{d}\vec{k} = a_0 \int e^{i\{[\omega_0 + \vec{u}(\vec{k}-\vec{k_0})]t - (\vec{k}\vec{r})\}}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z. \qquad (2)$$

Интеграл (2) — трехмерный по области $|\vec{k} - \vec{k_0}| \le q$. Учитывая, что $(\vec{u}\vec{k}) = u_x k_x + u_y k_y + u_z k_z$ и вводя вектор $\vec{\rho} = \vec{r} - \vec{u}t$, запишем

$$E(\vec{r}, t) = a_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{r}\vec{k_0})} \int e^{-i\vec{\rho}(\vec{k}-\vec{k_0})}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z. \qquad (3)$$

Перейдем от интегрирования по $\vec{k}$ в декартовой системе координат к интегрированию в сферической системе координат с полярной осью вдоль вектора $\vec{\rho}$ и с началом в точке $\vec{k_0}$. Получим

$$E(\vec{r}, t) = a_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{r}\vec{k_0})} \int_0^q \int_0^\pi e^{-i\rho k' \cos\theta} 2\pi k'^2 \mathrm{d}k' \sin\theta \mathrm{d}\theta, \qquad (4)$$

где $\vec{k'} = \vec{k} - \vec{k_0}$. Интегрируя правую часть уравнения (4) по θ, получаем

$$E(\vec{r}, t) = 4\pi a_0 e^{i(\omega_0 t - \vec{k_0}\vec{r})} \cdot \frac{1}{\rho} \int_0^q \sin\rho k' \cdot k' \mathrm{d}k'.$$

Окончательно

$$E(\vec{r},t) = \frac{4\pi a_0 q}{\rho^2}\left(\frac{\sin\rho q}{\rho q} - \cos\rho q\right) e^{i(\omega_0 t - \vec{k_0}\vec{r})}. \qquad (5)$$

Выражение (5), описывающее результирующее поле, можно представить в виде произведения двух сомножителей:

$$A(\vec{r},t) = \frac{4\pi a_0 q}{\rho^2}\left(\frac{\sin\rho q}{\rho q}\right) \text{ и } e^{i(\omega_0 t - \vec{k_0}\vec{r})}.$$

Второй из них представляет бегущую волну, однородную в пространстве со средней частотой ω_0 и волновым вектором $\vec{k_0}$. Множитель $A(\vec{r},t)$ можно рассматривать как амплитуду результирующей волны, которая заметно отлична от нуля только в пространственной области $\rho q \leq 1$ и одинакова при равных ρq. Например, при $\rho q = 0$, т. е. $\rho = 0$, амплитуда максимальна и равна $2\pi a_0 q^3$. Но $\rho = |\vec{r} - \vec{u}t|$ равно нулю в точке $\vec{r} = 0$ в момент времени $t = 0$ и в последующие моменты времени в точках, определяемых радиусом вектором $\vec{r} = \vec{u}t$. Таким образом, результирующее поле в действительности представляет волновой пакет, т. е. ограниченное в пространстве возмущение, которое движется как целое без изменения формы с групповой скоростью $\vec{u} = \frac{d\omega}{d\vec{k}}$.

Р.16. Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета с гауссовской амплитудной кривой $a(k) = a_0 \exp\{-\alpha(k-k_0)^2\}$, учитывая квадратичные члены в дисперсии.

В задаче (Р. 15) рассмотрено движение волнового пакета, когда квадратичные члены в дисперсии не учитывались. Получено, что волновой пакет движется, не «расплываясь». Исследуем этот вопрос в случае, когда в законе дисперсии присутствует квадратичный член, т. е. $\omega(k) = \omega_0 + u(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2$, где $u = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{(k=k_0)}$, $\beta = \left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right|_{(k=k_0)}$.

Волновой пакет выразится интегралом

$$E(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{i(\omega t - kz)} \mathrm{d}k =$$

$$= a_0 e^{i(\omega_0 t_0 - kz)} \int e^{-[(k-k_0)^2(\alpha - i\beta t) + i(k-k_0)(z-\omega t)]} \mathrm{d}k.$$

Обозначим $\gamma = \alpha - i\beta t,\ \ \xi = z - ut$. Делая замену $k_1 = k - k_0$ и дополняя до полного квадрата показатель экспоненты, получаем

$$E(z,t) = a_0 a e^{i(\omega_0 t_0 - kz) - \frac{\xi^2}{4\gamma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(k_1\sqrt{\gamma} + \frac{i\xi}{2\sqrt{\gamma}})^2} \mathrm{d}k' =$$

$$= a_0 e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}} e^{i(\omega_0 t_0 - kz)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\gamma}}.$$

Окончательно

$$E(z,t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}} e^{-\frac{(z-ut)^2}{4(\alpha - i\beta t)}} e^{i(\omega_0 t_0 - kz)}.$$

Поскольку амплитуда волны

$$E(z,t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha - i\beta t}} e^{-\frac{(z-ut)^2}{4(\alpha - i\beta t)}}$$

комплексна, то проще исследовать характер зависимости пакета от z и t, образовав квадрат модуля амплитуды, так как именно он определяет интенсивность волны:

$$|E(z,t)|^2 = |E_0(z,t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}} \exp\left[-\frac{\alpha(z-ut)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}\right]. \quad (1)$$

Из этого выражения видно, что полуширина кривой интенсивности растет со временем по закону $\Delta z = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)/\alpha}$, а высота убывает как $1/\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 t^2}$. Волновой пакет расплывается, но для времени $t << \alpha/\beta$ пакет мало деформируется, и можно говорить о его распространении со скоростью

$$u = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{(k=k_0)},$$

называемой групповой.

Р.17. Волновой пакет длиной ℓ входит в среду с дисперсией $\omega(k) = u(k-k_0)+\beta(k-k_0)^2$. Оценить его размер после прохождения слоя толщиной d.

Используя решение задачи Р. 16 (формула 1), для модуля амплитуды волнового пакета находим

$$|E_0(z,t)| = \frac{\sqrt{\pi}a_0}{(\alpha^2+\beta^2t^2)^{1/4}}\exp\left\{-\frac{\alpha(z-ut)^2}{4(\alpha^2+\beta^2t^2)}\right\}.$$

Из этого выражения видно, что полуширина волнового пакета (расстояние, на котором амплитуда уменьшается в e раз) определяется множителем в показателе экспоненты, равном

$$\Delta z(t) \approx \sqrt{4(\alpha^2+\beta^2t^2)/\alpha},$$

а сам пакет движется с групповой скоростью u. Пусть при $t = 0$ $\Delta z(0) = 2\sqrt{\alpha} = \ell/2$, тогда через интервал времени Δt, равный времени прохождения слоя ширины d, $\Delta t = d/u$, размер пакета

$$\Delta S = \left[\ell^2+\left(\frac{16\beta d}{u\ell}\right)^2\right]^{1/2} = \ell\cdot\left[1+\left(\frac{16\beta d}{u\ell^2}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Если второе слагаемое под корнем много больше единицы, размер пакета можно оценить как $\Delta S \approx 16\beta d/(u\ell)$.

Р.18. Вычислить групповую скорость для различных законов дисперсий (v — фазовая скорость):

а) $v = \text{const}$ — звук в воздухе;

б)$v = a\sqrt{\lambda}$ — гравитационные волны на воде;

в) $v = a/\sqrt{\lambda}$ — капиллярные волны;

г) $v = \sqrt{c^2+b^2\lambda^2}$ — электромагнитные волны в ионосфере (c — скорость света, λ — длина волны);

д) $v = \frac{c\omega}{\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 - c^2\alpha^2}}$ — электромагнитные волны в прямолинейном волноводе, заполненном диспергирующей средой с $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ и $\mu = \mu(\omega)$; c — скорость света в вакууме, α — геометрический фактор волновода.

а) $v = \frac{\omega}{k}$ — групповая скорость $u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk}(vk) = v$, поскольку $v = \text{const}$.

б) $\omega = vk = ka\lambda = ka\sqrt{\frac{2\pi}{k}} = \sqrt{2\pi}a\sqrt{k}$; $v = \sqrt{2\pi}a/\sqrt{k}$, $u = \frac{d\omega}{dk} = \sqrt{\pi}/\sqrt{2k} = v/2$.

в) $v = a/\sqrt{\lambda} = a\sqrt{k/2\pi}$, $\omega = a\sqrt{k^3/2\pi}$, $u = (3/2)a\sqrt{k/2\pi} = 3v/2$.

г) $\omega = vk$, $u = \frac{d\omega}{dk} = v + k\cdot\frac{dv}{dk}$, $v = \sqrt{c^2 + b^2\lambda^2} = \sqrt{c^2 + b^2(\frac{2\pi}{k})^2}$.

$$u = v - \frac{1}{v}\left(\frac{2\pi b}{k}\right)^2 = c^2/v.$$

д) $v = c\omega/\sqrt{\varepsilon\mu\omega^2 c^2\alpha^2}$, $\omega = kv = \sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}/\varepsilon\mu$,

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}} + (-\frac{1}{2})\sqrt{k^2c^2 + \alpha^2c^2}\frac{d(\varepsilon\lambda)}{(\varepsilon\mu)^{3/2}d\omega}\cdot\frac{d\omega}{dk}.$$

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{c^2}{[1 + (\omega/2\varepsilon\mu)\cdot d(\varepsilon\mu)/d\omega]v}.$$

Р.19. Найти фазовую и групповую скорости волн в среде, диэлектрическая проницаемость которой имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2)$, где ω_p и ω_0 — константы. Рассмотреть случаи $\omega \ll \omega_0$ и $\omega \gg \omega_0$, $(\mu = 1)$.

Фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} = c\left[1 + \frac{\omega_p^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)}\right]^{-\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Для нахождения групповой скорости выражение (1) запишем в виде

$$k^2c^2 = \omega^2(1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2))$$

и обе части продифференцируем по k.

После несложных преобразований получим

$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{kc^2}{\omega}\left[1 + \frac{\omega_p^2\omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}\right]^{-1}. \qquad (2)$$

Подставляя в уравнение (2) выражение для k через ω из формулы (1), для групповой скорости $u = \frac{d\omega}{dk}$ получаем

$$u = c \cdot \left[1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - \omega^2)\right]^{1/2} \Big/ \left[1 + \omega_p^2\omega_0^2/(\omega_0^2 - \omega^2)^2\right]. \qquad (3)$$

Для нахождения поведения групповой скорости при $\omega << \omega_0$ выражение (3) запишем в виде

$$u = c \cdot \frac{\left[1 + \frac{\omega_p^2/\omega_0^2}{1-\omega^2/\omega_0^2}\right]^{1/2}}{1 + \frac{\omega_p^2/\omega_0^2}{\left(1-\omega^2/\omega_0^2\right)^2}}$$

и разложим правую часть в ряд Тейлора по малой величине ω^2/ω_0^2. Ограничиваясь первым порядком малости, получаем

$$u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right), \quad \omega << \omega_0,$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(\omega = 0) = 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$.

Поступая аналогичным образом, для фазовой скорости при $\omega << \omega_0$ из уравнения (1) получим

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right), \quad \omega << \omega_0.$$

Для нахождения групповой скорости при $\omega >> \omega_0$ выражение (3) запишем в виде

$$u = c \cdot \frac{[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}/(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1)]^{1/2}}{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}(\frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2/(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1)^2}$$

и разложим в ряд Тейлора по малой величине ω_0^2/ω^2. Ограничиваясь, как и прежде, первым порядком малости, получим

$$u = c \cdot \left[1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right].$$

Поступая аналогичным образом для фазовой скорости при $\omega \gg \omega_0$, находим $v = c \cdot (1 + \omega_p^2/2\omega^2)$.

Р.20. Пользуясь соотношением неопределенностей, оценить размер области, в которой применимо понятие луча в оптике.

Геометрическая оптика рассматривает распространение волн как распространение лучей (см. задачу Р. 10). В каждой точке волне приписывается вполне определенное направление распространения и значение волнового вектора. Таким свойством обладают плоские волны. Однако в общем случае электромагнитные волны в среде не являются плоскими. Тем не менее волны оптического диапазона рассматривают как плоские в каждом небольшом участке пространства. Но, с другой стороны, волна, занимающая конечную область пространства ℓ, не может иметь вполне определенный волновой вектор $\vec{k}$, а представляет собой суперпозицию плоских волн с волновыми векторами, лежащими в некотором интервале Δk, для которого справедливо соотношение неопределенностей

$$\ell \cdot \Delta k \geq 1. \qquad (1)$$

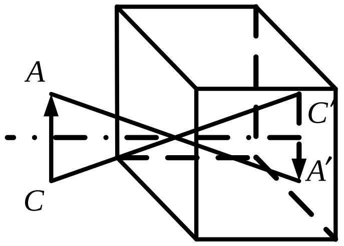
Для того, чтобы можно было говорить о волне с волновым вектором

$\vec{k}$, должно выполняться условие

$$\Delta k \ll k. \qquad (2)$$

Поскольку $k \sim 1/\lambda$, а $\Delta k \sim 1/\ell$ (что следует из уравнения (1)), то выражение (2) равносильно $\ell \gg \lambda$. Понятие луча применимо, если длина волны много меньше характерного размера области распространения волн.

Р.21. Оценить диаметр отверстия камеры-обскуры длиной ℓ, при котором изображение получится самым резким (длина волны λ).



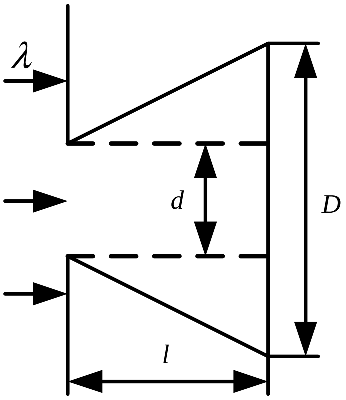
Камера-обскура — это ящик с маленьким отверстием на одной из стенок. Изображение получается на стенке, расположенной напротив отверстия. Лучи света, испускаемые различными точками объекта AC, распространяются во все стороны, но в камеру попадают только те, которые могут пройти через отверстие. Так, точка A дает светлое пятно в точке A', точка C в C' и т. д. Совокупность таких пятен, получающихся от различных мест объекта AC, и есть изображение. Если свет распространяется строго прямолинейно, то светлое пятно от каждой точки имеет размер не менее диаметра отверстия. Но из соотношения неопределенностей следует, что если пучок света имеет конечную ширину, то направление распространения света в таком пучке не может быть везде строго одинаковым. При падении света на отверстие (например, перпендикулярно) оно ограничивает в своей плоскости ширину пучка, и у пучка в плоскости отверстия появляется разброс волновых векторов в соответствии с соотношением неопределенностей: $\Delta k_\perp d \geq 2\pi$, откуда $\Delta k_\perp \geq \frac{2\pi}{d}$. Принимая $\Delta k_\perp \sim 2\pi/d$ и учитывая что $d >> \lambda$, получаем $\Delta k_\perp << k$ и угол $\theta \simeq \frac{\Delta k_\perp}{k} = \frac{\lambda}{d}$.

Размер пятна в камере определяется двумя факторами: размером

отверстия и расширением волны вследствии ограничения пучка, т. е.

$$D = d + \ell\theta = d + \ell\frac{\lambda}{d},$$

где ℓ — длина камеры.

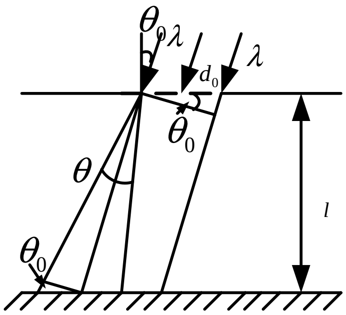


Если величина d очень малая, то второе слагаемое очень большое, а если велико d, то велико первое слагаемое. Взяв производную $\mathrm{d}D/\mathrm{d}d$ и приравняв ее к нулю, получим размер отверстия, при котором размер пятна D наименьший.

Найдем, что в этом случае $d \sim \sqrt{\lambda\ell}$. При таком размере отверстия изображение объекта, являющееся наложением пятен от различных точек объекта, будет наиболее резкое, потому что эти пятна будут предельно перекрываться. Кстати, размер пятна в этом случае будет в 2 раза больше ширины щели $D = 2\sqrt{\lambda\ell}$. Множитель 2 не следует понимать буквально, потому что мы оцениваем порядок велины и можно считать $D \simeq \sqrt{\lambda\ell}$.

Расстояние до фотографируемого объекта обычно много больше длины камеры ℓ, поэтому мы пренебрегли отклонением угла падения света для различных точек объекта от нормального. Наклонное падение света на щель рассмотрено в задаче Р. 22.

Р.22. Плоская волна падает на щель в экране шириной d_0, образуя угол θ_0 с нормалью к плоскости экрана. Используя соотношение неопределенностей, оценить ширину световой полосы на втором экране, расположенном на расстоянии ℓ от первого. Длина волны λ.



Фронт волны, проходящей через щель шириной d_0, имеет протяженность $d = d_0 \cos\theta_0$. Из соотношения неопределенностей (см. задачу Р. 21) у волны появляется разброс волновых

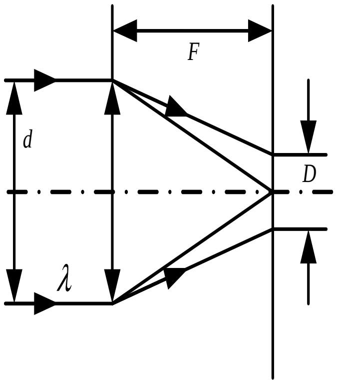
векторов Δk в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, такой что $\Delta k d \sim 2\pi$ и $\Delta k \sim 2\pi/d$. Откуда расхождение пучка $\theta \sim \frac{\Delta k}{k}\frac{\lambda}{d_0\cos\theta_0}$ и уширение пятна за счет расходимости пучка $\frac{\ell}{\cos\theta_0}\cdot\frac{\theta}{\cos\theta_0} = \frac{\ell\lambda}{d_0\cos^3\theta_0}$. Окончательно

$$D = d_0 + \ell\lambda/(d_0\cos^3\theta_0).$$

Р.23. Оценить минимальный размер светового пятна на Луне от света лазера, расположенного на Земле (длина волны $\lambda = 5\cdot 10^3$ Å).

Минимальный размер светового пятна на Луне (см. задачу Р. 21) $D \sim \sqrt{\lambda L}$, где $L \approx 4\cdot 10^5$км — расстояние от поверхности Земли до Луны. Подставляя значения λ и L, получим $D \sim 10$ м. Вообще говоря, для того, чтобы получить такой размер пятна, нужно чтобы выходное окно лазера имело размер ~ 10 м (см. задачу Р. 21). Если взять для лазера разумный размер отверстия $d \sim 1$ см, то размер пятна на Луне будет $D \sim \frac{L\lambda}{d} = 20$ км.

Р.24. Используя соотношение неопределенностей, оценить размер пятна на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы (фокусное расстояние — F, диаметр — d), собравшей параллельный пучок лазерного света с длиной волны λ, падающего на линзу вдоль ее главной оптической оси.



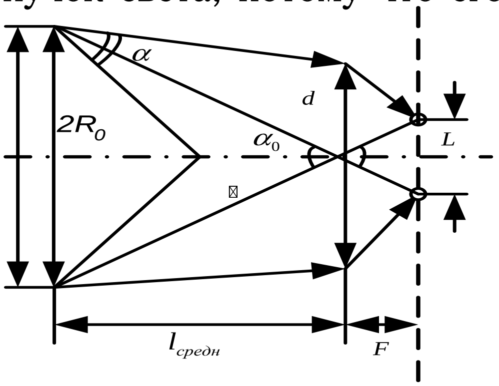
Линза, точнее оправа линзы, ограничивает пучок света. В результате на выходе из линзы у волны появляется разброс волновых векторов $\Delta k_\perp \sim \frac{2\pi}{d}$. Угол отклонения от направления луча, принятого в геометрической оптике, составит $\theta \sim \frac{\Delta k_\perp}{k} \sim \frac{\lambda}{d}$, что приведет к размытости пятна размером $D \sim F\frac{\lambda}{d}$ с точностью до второго порядка малости $(d \ll F)$.

Итак, пучок света, все лучи которого, согласно геометрической оп-

тике, должны были бы пересечься в одной точке, в действительности дает изображение не в виде точки, а в виде некоторого пятна размером $F\lambda/d$.

Р.25. Используя соотношение неопределенностей и вводя размер своего зрачка d, оценить: в виде кружка или яркой звезды Вы увидели бы Солнце с орбиты Плутона ($\ell \sim 6 \cdot 10^9$км). Угловой размер Солнца на Земле $\theta_\odot \approx 10^{-2}$рад, расстояние между Солнцем и Землей $\ell_\odot \approx 1,5 \cdot 10^8$км. Средняя длина световой волны $\lambda \sim 5 \cdot 10^{-5}$см.

Можно считать, что от каждой точки Солнца идет параллельный пучок света, потому что его расходимость у Земли уже очень мала.



Она определяется отношением диаметра зрачка к ℓ : $\alpha \sim d/\ell$. Параллельный же пучок света, исходящий из какой-то точки Солнца, изобразится на сетчатке кружком диаметром $D \sim F\frac{\lambda}{d}$ (см. задачи Р. 21, Р. 24). Две светящиеся точки, расположенные на концах диаметра Солнца, будут разнесены на сетчатке глаза на расстояние $L \approx F \cdot \alpha_0$, где α_0 — угол, под которым видно Солнце:

$$\alpha_0 = \frac{2R_\odot}{\ell_{\text{сред}}}, \quad \alpha_0 \gg \alpha.$$

Если расстояние L будет больше размера кружка, которым изображается каждая точка, то можно считать, что Солнце в целом будет видно как кружок, т. е. $\alpha_0 F > \frac{\lambda}{d}F$. Значит, условие выглядит так:

$$\alpha_0 > \lambda/d. \tag{1}$$

Принимая $d \sim 1$см и учитывая $\alpha_0 = 2R_\odot/\ell_{\text{сред}} = \ell_\odot\theta_\odot/\ell_{\text{сред}}$, получаем $\lambda/d = 5 \cdot 10^{-5}$, $\ell_\odot\theta_\odot/\ell_{\text{сред}} = 2,5 \cdot 10^{-4}$. Неравенство (1) выполняется. Солнце с орбиты Плутона выглядит как кружок.

Р.26. Оценить максимальные длины волн, на которых возможны: а) радиовещание; б) телевидение.

а) Частоты слышимых звуковых волн лежат в диапазоне $20 \div 20\,000$ Гц и относятся к низким частотам. Для передачи речи или музыки требуются частоты от 100 Гц до нескольких тысяч. Например, частота самой высокой ноты около 4 000 Гц. Но непосредственная передача низкочастотных сигналов радиоволнами тех же частот невозможна из-за трудности их генерации. Дело в том, что для передачи сигналов используют излучающие антенны. Это замкнутые провода или системы проводов, по которым текут переменные токи. Мощность же излучения пропорциональна четвертой степени частоты ω^4. Поэтому антенны, по которым текут низкочастотные токи, излучают слабо. Кроме того, длина антенны должна быть порядка длины волны, что для частоты, например, 1 000 Гц составляет $\ell \sim \lambda = c/\nu \sim 300$ км. Антенну такой длины весьма трудно построить. Кроме того, строго монохроматическая волна, имеющая везде одинаковую амплитуду, не годится для передачи сигналов. Чтобы передать информацию, сигнал должен иметь некоторые границы во времени. Этого можно добиться, например, с помощью модулирования амплитуды волны. Поэтому в радиовещании передачи осуществляются волнами высокой частоты в диапазоне $10^5 \div 10^8$ Гц модулированными низкочастотными сигналами. При амплитудной модуляции волны имеют вид

$$E = E_0(1 + A\sin(\Omega t))\sin(\omega t),$$

где несущая частота ω — из диапазона $10^5 \div 10^8$ Гц, а Ω — звуковая частота. Эта волна на самом деле состоит из трех монохроматических волн с частотами $\omega - \Omega$, ω, $\omega + \Omega$ (см. задачу Р. 13).

Если звуковая частота $\Omega \ll \omega$, что на самом деле имеет место, то длина волны, соответствующая самой малой частоте $\omega - \Omega$, незначительно отличается от длины волны несущей частоты. Максимальная длина волны определяется минимальной несущей частотой 10^5Гц,

$\lambda = (3 \cdot 10^8 \text{м/с})/10^5\, 1/\text{с} = 3 \cdot 10^3$ м.

б) Оценим количество команд, которые нужно передать электронному пучку при его движении по экрану. На экране размером 50×50 см на расстоянии 1 мм друг от друга можно разместить 250 000 управляемых точек. Луч к каждой точке экрана должен возвращаться через $\sim \frac{1}{25}$ с с командой «загореться» или «потухнуть», потому что изображение должно воспроизводиться 25 раз в секунду. Таким образом, сам луч получает в секунду $25 \cdot 250\,000$ команд и, значит, длительность τ каждой команды (импульса в антенне) не должна превышать 10^{-7}с. Чтобы сформировать импульс такой длительности, необходим диапазон частот $\Delta\nu \sim \tau^{-1} \geq 10^7$ Гц, так как $\Delta\nu \cdot \tau \geq 1$. Несущая частота для телевизионного канала лежит в диапазоне $40 \div 200$ мГц. Отсюда максимальная длина волны

$$\lambda \sim \frac{3 \cdot 10^8 \text{ м/с}}{(40 \div 30) \cdot 10^6 \text{ Гц}} = 10 \text{ м}.$$

Р.27. Показать, что в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками не могут распространяться чисто поперечные волны.

Волновод представляет собой полость неограниченной длины. Распространение электромагнитных волн в волноводе принципиально отличается от распространения неограниченных в пространстве плоских волн. Пусть длины сторон прямоугольного сечения равны a и b, ось Z направлена вдоль волновода, а среда, заполняющая волновод, характеризуется диэлектрической и магнитной проницаемостями соответственно ε и μ.

Граничные условия для векторов поля на поверхности волновода — это граничные условия для идеального проводника. Поскольку внутри идеального проводника отсутствует электрическое и магнитное поле, то на поверхности волновода должны выполняться следующие усло-

вия:

$$E_\tau| = 0; \tag{1}$$

$$H_n| = 0; \tag{2}$$

$$H_\tau| = \frac{4\pi}{c} j_{\text{пов}}; \tag{3}$$

$$E_n| = 4\pi\sigma/\varepsilon, \tag{4}$$

где индексы τ и n означают соответственно тангенциальные и нормальные составляющие векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$, $j_{\text{пов}}$ и σ — плотности поверхностного тока и заряда.

Если в начале волновода (при $z = 0$) попытаться возбудить монохроматическую плоскую волну, то естественно допустить, что в волноводе возникает бегущая вдоль Z волна, для которой зависимость E и H от z дается множителем $e^{-ik_z z}$ с постоянным k_z, т. е.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - k_z z)}, \quad \vec{H} = \vec{H}_0(x, y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{5}$$

Волновые уравнения для E и H имеют вид

$$\Delta\vec{E} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}; \tag{6}$$

$$\Delta\vec{H} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}, \tag{7}$$

где $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Подставляя соотношения (5) в уравнения (6), (7), получаем

$$\frac{\partial^2\vec{E}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}_0}{\partial y^2} = -\varkappa^2\vec{E}_0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2\vec{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{H}_0}{\partial y^2} = -\varkappa^2\vec{H}_0, \tag{9}$$

где $\varkappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k_z^2$. Связь между векторами E и H определяется уравнениями

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \mathrm{rot}\vec{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \tag{10}$$

Записывая эти уравнения по компонентам и подставляя в них решение в виде выражений (5), получаем

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{x0} = -ik_z E_{y0} - \frac{\partial E_{z0}}{\partial y}; \tag{11}$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{y0} = ik_z E_{x0} + \frac{\partial E_{z0}}{\partial x}; \tag{12}$$

$$\frac{i\mu\omega}{c}H_{z0} = \frac{\partial E_{xo}}{\partial y} - \frac{\partial E_{y0}}{\partial x}; \tag{13}$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{x0} = ik_z H_{y0} + \frac{\partial H_{z0}}{\partial y}; \tag{14}$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{y0} = -ik_z H_{x0} - \frac{\partial H_{z0}}{\partial x}; \tag{15}$$

$$\frac{i\varepsilon\omega}{c}E_{z0} = \frac{\partial H_{xo}}{\partial y} - \frac{\partial H_{y0}}{\partial x}. \tag{16}$$

Формулы (11)–(16) позволяют выразить компоненты векторов E_{x0}, E_{y0}, H_{x0}, H_{y0} через E_{z0} и H_{z0}:

$$E_{x0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(ik_z\frac{\partial E_{z0}}{\partial x} + \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_{z0}}{\partial y}\right); \tag{17}$$

$$E_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(ik_z\frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - \frac{i\omega\mu}{c}\frac{\partial H_{z0}}{\partial x}\right); \tag{18}$$

$$H_{x0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(\frac{i\varepsilon\omega}{c}\frac{\partial E_{z0}}{\partial y} - ik_z\frac{\partial H_{z0}}{\partial z}\right); \tag{19}$$

$$H_{y0} = -\frac{1}{\varkappa^2}\left(-\frac{i\varepsilon\omega}{c}\frac{\partial x E_{z0}}{\partial y} - ik_z\frac{\partial H_{z0}}{\partial y}\right). \tag{20}$$

Как известно, для плоских волн векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ перпендикулярны направлению распространения, т. е. если волна распространяется вдоль оси Z, как в нашем случае, то для такой волны $E_z = 0$ и $H_z = 0$. Из полученных формул (17)—(20) ясно, что E_{z0} и H_{z0} одновременно не могут быть равны нулю, поскольку в этом случае все компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ будут равны нулю, если только $\varkappa \neq 0$. Если $\varkappa = 0$, что означает $\omega^2 = v^2k_z^2$ и имеет место для плоской монохроматической волны в неограниченной среде, то тогда уравнение (9) запишется в виде

$$\frac{\partial^2\vec{H}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{H}_0}{\partial y^2} = 0.$$

Магнитное поле в этом случае удовлетворяет двумерному уравнению Лапласа с таким граничным условием, что на сторонах прямоугольника $x = 0, a;\ y = 0, b$ поле направлено вдоль границы. Решением такой краевой задачи, как известно, служит $\vec{H} = 0$. Но если отсутствует магнитное поле, то равно нулю и электрическое поле. Таким образом, чисто поперечные электромагнитные волны не могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками. Следует заметить, что этот вывод относится к любым волноводам, выполненным в виде простой трубы любого сечения, поскольку в процессе вывода мы нигде не использовали явный вид формы сечения.

Р.28. Найти связь между поперечными компонентами полей и продольной составляющей электрического поля E_z для монохроматической E-волны, распространяющейся вдоль прямоугольного пустого волновода. Найти уравнение для составляющей поля E_z. То же для H-волны. Определить типы волн, которые могут распространяться в

таком волноводе.

Из формул (17)–(20) предыдущей задачи следует, что в волноводе могут распространяться волны типа:

$$1)\ E_z \neq 0, \quad H_z = 0;$$

$$2)\ E_z = 0, \quad H_z \neq 0.$$

В первом случае магнитное поле в волне является чисто поперечным, поскольку $H_z = 0, H_z \neq 0, H_y \neq 0$. Это E-волна или TM-волна. Во втором случае электрическое поле имеет поперечный характер, а магнитное поле имеет продольную и две поперечные компоненты. Такая волна называется H-волной или TE-волной.

Для E-волны в пустом волноводе ($\varepsilon = \mu = 1$) формулы (17)–(20) из предыдущей задачи примут вид

$$E_{x0} = -\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_{z0}}{\partial x}, \quad E_{y0} = -\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial E_{z0}}{\partial y}, \tag{1}$$

$$H_{x0} = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_{z0}}{\partial y}, \quad H_{y0} = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_{z0}}{\partial x}, \tag{2}$$

где $\varkappa^2 = (\omega^2/c) - k_z^2$.

Таким образом, в E-волне все поперечные компоненты векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ могут быть выражены через продольную компоненту электрического поля E_{z0}, которая определяется путем решения волнового уравнения (см. уравнение (8) из предыдущей задачи):

$$\frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{z0}}{\partial y^2} + \varkappa^2 E_{z0} = 0. \tag{3}$$

Аналогичным образом в H-волне поперечные составляющие $\vec{E}$ и $\vec{H}$ могут быть выражены через продольную компоненту магнитного поля H_{z0} следующим образом:

$$H_{x0} = -\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial H_{z0}}{\partial x}, \quad H_{y0} = -\frac{ik_z}{\varkappa^2}\frac{\partial H_{z0}}{\partial y}; \tag{4}$$

$$E_{x0} = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_{z0}}{\partial y}, \quad E_{y0} = -\frac{i\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial H_{z0}}{\partial x}. \tag{5}$$

Продольное же поле H_{z0} находится из уравнения

$$\frac{\partial^2 H_{z0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{z0}}{\partial y^2} + \varkappa^2 H_{z0} = 0. \tag{6}$$

Для выполнения граничного условия к уравнению (3), заключающегося в обращении в нуль касательных составляющих на стенке волновода (см. формулу (1) из предыдущей задачи), достаточно потребовать $E_{z0} = 0$ на контуре сечения волновода. Граничное условие уравнения (6), обеспечивающее, согласно формулам (1)–(2) предыдущей задачи, обращение в нуль нормальной компоненты $\vec{H}$, можно представить в виде $\frac{\partial H_{z0}}{\partial n} = 0$ на контуре сечения.

Решением уравнения (3) с соответствующим граничным условием будет функция

$$E_{z0} = A\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y),$$

где $k_x = \frac{\pi}{\alpha}m$, $k_y = \frac{\pi}{b}n$, a, b — длины сторон прямоугольного сечения вдоль осей X и Y с началом координат в углу волновода соответственно, m и n — целые числа, не равные нулю, причем

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2/c^2.$$

Тогда поле E_z будет иметь вид

$$E_z = A\sin(k_x x) \cdot \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_z z)}. \tag{7}$$

Волна имеет продольную компоненту вектора $\vec{E}$ и зависит от чисел m и n. Ее называют E_{mn}-волной. Это — волна, бегущая в положительном направлении оси Z и стоячая в плоскостях $z = \text{const}$. Скорость распространения волны вдоль волновода

$$u_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = c^2 k_z/\omega.$$

Остальные компоненты поля $\vec{E}$ и компоненты поля $\vec{H}$ находятся из уравнений (1) и (2). У стенок волновода линии магнитного поля тангенциальны к поверхности и образуют замкнутые кривые, охватывающие продольные линии электрического поля.

Аналогичным образом, для H-волны получим

$$H_z = B\cos(k_x x)\cdot\cos(k_y y)e^{i(\omega t - k_z z)}, \tag{8}$$

где $k_x = \frac{\pi}{a}m,\ k_y = \frac{\pi}{b}n$. Здесь m и n — целые числа, причем каждое из этих чисел, но не оба одновременно, может принимать значение нуль. Остальные компоненты находятся из уравнений (4), (5). Вид волны зависит от целых чисел m и n, поэтому называется волной H_{mn}.

Р.29. Найти распределение тока в стенках пустого волновода прямоугольного сечения $a\times b$, в котором распространяется $H_{10}(E_{11})$-волна.

Ток, текущий по поверхности волновода, находится из различных условий и равен тангенциальной составляющей вектора $\vec{H}$, умноженный на коэффициент $c/4\pi$ (см. уравнение (3) задачи Р. 27). Условие (3) написано в скалярной форме. Направление же вектора тока $\vec{j}$ перпендикулярно направлению магнитного поля $\vec{H}$ и нормали $\vec{n}$ к поверхности

$$\vec{j} = \frac{c}{4\pi}[\vec{n}\times\vec{H}]. \tag{1}$$

Для волны H_{10} из уравнений (8), (4), (5) задачи Р. 28 находим

$$H_z = B\cos\frac{\pi}{a}x\cdot\cos(\omega t - k_z z),$$

$$H_x = \frac{k_z a B}{\pi}\sin\frac{\pi}{a}x\cdot\cos(\omega t - k_z + \frac{\pi}{2}) = -\frac{k_z a}{\pi}B\sin\frac{\pi}{a}x\sin(\omega t - k_z z), \tag{2}$$

$$H_y = 0, \quad E_z = E_x = 0;$$

$$E_y = \frac{\omega a B}{\pi c} \sin\frac{\pi}{a}x \cdot \cos(\omega t - k_z + \frac{\pi}{2}) = \frac{\omega a}{\pi c} B \sin(\omega t - k_z z), \quad (3)$$

где $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}$, B — амплитудный коэффициент.

Магнитные силовые линии H_{10} образуют замкнутые контуры, лежащие в плоскостях $y = \mathrm{const}$, при этом

$$\frac{H_z^2}{\cos^2(\frac{\pi x}{a})} + \frac{H_x^2}{(\frac{k_z a}{\pi} \sin\frac{\pi}{a}x)^2} = B^2.$$

Электрические линии параллельны оси Y, при этом максимум электрического поля сдвинут вдоль оси Z от центра семейства магнитных линий на четверть пространственного периода $\lambda = 2\pi/k_z$. Из уравнения (1) находим составляющие тока на «дне» и «крышке» волновода:

$$j_x(y=0) = \frac{c}{4\pi} H_z = \frac{cB}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\omega t - k_z z\right),$$

$$j_z(y=0) = -\frac{c}{4\pi} H_x = \frac{c k_z a}{4\pi^2} B \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\omega t - k_z z\right),$$

$$j_x(y=b) = -\frac{c}{4\pi} H_z = -\frac{cB}{4\pi} \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\omega t - k_z z\right),$$

$$j_z(y=b) = \frac{c}{4\pi} H_x = -\frac{c k_z a}{4\pi^2} B \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\omega t - k_z z\right).$$

На боковых стенках имеются только y-е составляющие токов:

$$j_y(x=0) = -\frac{c}{4\pi} H_z|_{x=0} = -\frac{c}{4\pi} B \cos(\omega t - k_z z),$$

$$j_y(x=a) = \frac{c}{4\pi} H_z|_{x=a} = -\frac{c}{4\pi} B \cos(\omega t - k_z z).$$

Используя соотношение (4) задачи Р. 27 и выражение (3) для E_y, находим поверхностную плотность зарядов σ на «дне» и «крышке» волновода:

$$\sigma|_{y=0} = \frac{\omega a}{4\pi^2 c} B \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\omega t - k_z z\right),$$

$$\sigma|_{y=b} = -\frac{\omega a}{4\pi^2 c} B \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\omega t - k_z z\right).$$

Аналогично для волны E_{11} найдем

$$E_z = A \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot \cos(\omega t - k_z z),$$

$$H_x = -\frac{\omega\pi}{c\varkappa^2 b} A \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot \sin\left(\omega t - k_z z\right),$$

$$H_y = \frac{\omega\pi}{c\varkappa^2 a} A \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cdot \sin\left(\omega t - k_z z\right), \quad H_z = 0,$$

где $\varkappa^2 = \frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{b^2}$. Ввиду отсутствия продольной компоненты магнитного поля магнитные силовые линии лежат в плоскости поперечного сечения и токи всюду имеют только z-е компоненты. Итак, на «дне» и «крышке»

$$j_z = \mp\frac{c}{4\pi} H_x|_{y=a,b},$$

на боковых сторонах

$$j_z = \pm\frac{c}{4\pi} H_y|_{x=0,a}.$$

Р.30. В резонаторе, имеющем форму куба с ребром a, возбуждена основная мода колебаний, в которой отлична от нуля x-компонента электрического поля. Найти величину и направление сил, действующих на стенки резонатора, если полная энергия электромагнитного поля в резонаторе равна W.

Для нахождения электромагнитного поля в пустом пространстве, ограниченном идеально проводящими стенками, достаточно решить волновое уравнение для $\vec{E}$

$$\Delta\vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\vec{E} = 0 \qquad (1)$$

и уравнение

$$\mathrm{div}\vec{E} = 0 \qquad (2)$$

с граничным условием $E_\tau = 0$ на поверхности стенок. Магнитное поле находится из уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \qquad (3)$$

Выберем оси X, Y, Z по трем ребрам куба с началом в углу куба. Решением уравнений (1), (2) с граничным условием $E_\tau = 0$ будет

$$E_x = A \cos k_z x \cdot \sin k_y y \sin k_z z e^{i\omega t}.$$

В общем случае $k_x = \frac{\pi}{an_1}$, $k_y = \frac{\pi}{an_2}$, $k_z = \frac{\pi}{an_3}$, где n_1, n_2, n_3 — целые положительные числа и $\omega^2 = c^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^3)$. Поскольку в резонаторе возбуждена основная мода колебаний (колебание с наименьшей частотой), то $k_x = 0, k_y = k_z = \frac{\pi}{a}$, $\omega = c\frac{\pi}{a}\sqrt{2}$ и

$$E_x = A \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{a}z\right) e^{i\omega t}. \qquad (4)$$

Компоненты поля $\vec{H}$ найдем из уравнения (3). Получим

$$H_y = i\frac{\pi}{a}\frac{c}{\omega}A \cos\frac{\pi}{a}z \cdot \sin\frac{\pi}{a}y \cdot e^{i\omega t},$$

$$H_z = -i\frac{\pi}{a}\frac{c}{\omega}A \sin\frac{\pi}{a}z \cdot \cos\frac{\pi}{a}y \cdot e^{i\omega t}.$$

В элементе объема dV находится среднее по времени количество энергии

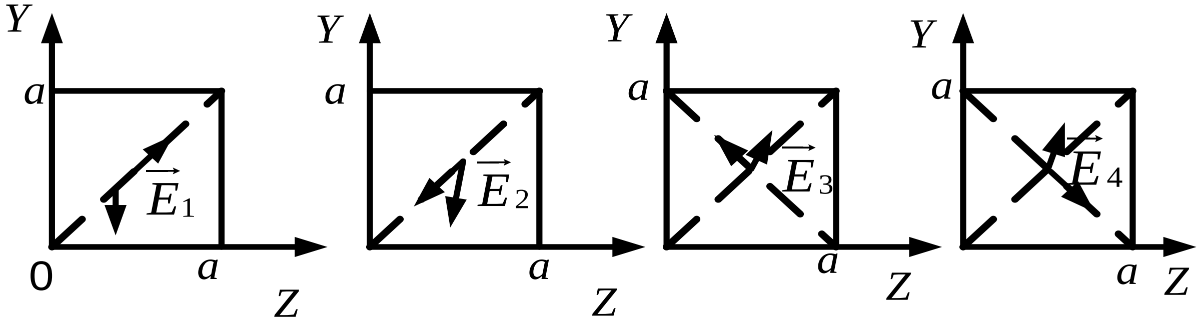
$$dW = \frac{1}{8\pi}(\overline{E^2} + \overline{H^2})dV,$$

где

$$\overline{E^2} = \overline{E_z^2} = A^2 \sin^2\frac{\pi}{a}y \cdot \sin^2\frac{\pi}{a}z \cos^2\omega t = \frac{A^2}{2}\sin^2\frac{\pi}{a}y \cdot \sin^2\frac{\pi}{a}z,$$

$$\overline{H^2} = \overline{H_y^2} + \overline{H_z^2} =$$

$$= \left(\frac{\pi c A}{a\omega}\right)^2 \frac{1}{2}\cos^2\frac{\pi}{a}z \cdot \sin^2\frac{\pi}{a}y + \left(\frac{\pi c A}{a\omega}\right)^2 \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{a}z \cdot \cos^2\frac{\pi}{a}y.$$



Интегрируя по всему объему резонатора, получаем

$$W = \frac{a}{8\pi}\int_0^a\int_0^a (\overline{E^2} + \overline{H^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{a}{8\pi}\left[\frac{A^2}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi c A}{a\omega}\right)^2\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2\right] = \frac{a^3A^2}{32\pi},$$

откуда $A^2 = \frac{32\pi}{a^3}W$.

Для нахождения давления на стенки резонатора представим E_x в виде суперпозиции плоских волн

$$E_x = A\frac{e^{i\frac{\pi}{a}y} - e^{-i\frac{\pi}{a}y}}{2i}\cdot\frac{e^{i\frac{\pi}{a}z} - e^{-i\frac{\pi}{a}z}}{2i}\cdot e^{i\omega t} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4,$$

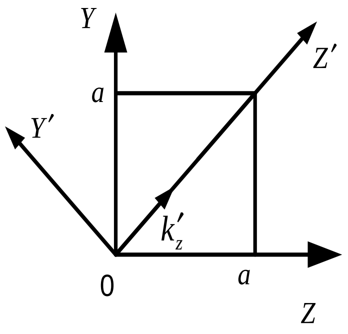
где $E_1 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}y - \frac{\pi}{a}z)}$, $E_2 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t + \frac{\pi}{a}y + \frac{\pi}{a}z)}$, $E_3 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}y + \frac{\pi}{a}z)}$, $E_4 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t + \frac{\pi}{a}y - \frac{\pi}{a}z)}$.

Волны E_1 и E_2, E_3 и E_4 распространяются во взаимно противоположных направлениях. Волновые векторы для каждой из волн лежат в плоскости $Y,\ Z$. На рисунках приведены направления распространения волн

Векторы $\vec{E}_1,\ \vec{E}_2,\ \vec{E}_3,\ \vec{E}_4$ направлены вдоль оси X. Волны падают только на стенки, расположенные перпендикулярно оси Z и оси Y, и оказывают на них давление. Например, волны E_1 и E_4, падая на сторону $z = a$, формируют отраженные волны E_2 и E_3.

Поскольку углы падения и отражения одинаковы для всех волн, то, для того чтобы найти давление на стенку $z = a$, достаточно найти

передаваемый импульс на эту стенку, например волной E_1, и результат учетверить.



Чтобы найти импульс, передаваемый волной E_1, запишем ее в новой системе координат с осью Z', направленной вдоль волнового вектора этой волны, и осью X' вдоль X. Получим

$$E_1 = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}\sqrt{2}z')},$$

$$H_{y'} = \frac{A}{4}\frac{c}{\omega}k'_z e^{i(\omega t - \frac{\pi}{a}\sqrt{2}z')} = -\frac{A}{4}e^{i(\omega t - k'_z z')},$$

где $k'_z = \frac{\pi}{a}\sqrt{2}$. В направлении Z' волна движется со скоростью, равной скорости света. Импульс, переносимый в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси Z', $p_{z'} = \frac{1}{c}S_{z'}$, где $S_{z'}$ — вектор Пойнтинга, равный

$$\vec{S_{z'}} = \frac{1}{2}\frac{c}{4\pi}[\vec{E_1} \times \vec{H^*_{y'}}] = \frac{c}{8\pi}\frac{A^2}{16}.$$

На стенку $z = a$ попадает импульс, который проходит через площадь $\Delta S = a \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}$, расположенную нормально к Z'. Но этот импульс направлен под углом 45^0 к стенке. Таким образом, нормальная составляющая импульса будет равна

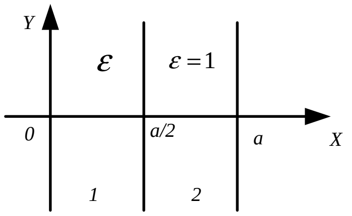
$$p_z = \frac{S_{z'}}{c}\frac{a^2}{\sqrt{2}}\cos 45^0 = S_z \cdot a^2/2c.$$

Полная сила, действующая на стенку,

$$F_z = 4p_z = \frac{A^2}{32}\frac{a^2}{8\pi} = \frac{W}{2a}.$$

Такая же сила действует на стенку $z = 0$ и стенку $y = 0$, $y = a$, т. е. $F_y = \frac{W}{2a}$. Сила $F_x = 0$, поскольку на стенки $x = 0$, $x = a$ импульс не переносится.

Р.31. Между двумя параллельными, идеально проводящими пластинками, расстояние между которыми равно a, возбуждается стоячая электромагнитная волна. Насколько изменится минимальная частота стоячей волны, если приложить к одной из пластин слой диэлектрика толщиной $a/2$, доходящей до ее краев? Диэлектрическая проницаемость вещества слоя $\varepsilon = 4$.



Сразу можем написать (см. рисунок)

$E_{1y}(x) = E_1 \sin k_1 x$, где $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$,

$E_{2y}(x) = E_2 \sin k_2(a - x)$, где $k_2 = \omega/c$,

ω — частота, $E_x \equiv 0$.

Из закона Фарадея следует, что $H_z \propto \partial E_y/\partial x$. Граничные условия выглядят как

$$E_1 \sin\frac{k_1 a}{2} = E_2 \sin\frac{k_2 a}{2},$$

$$k_1 E_1 \cos\frac{k_1 a}{2} = -k_2 E_2 \cos\frac{k_2 a}{2}$$

$$(E_{1y}|_{x=a/2} = E_{2y}|_{x=a/2}, \quad H_{1z}|_{x=a/2} = H_{2z}|_{x=a/2}).$$

Поделив первое уравнение на второе, получим

$$(1/k_1)\,\mathrm{tg}(k_1 a/2) = (-1/k_2)\,\mathrm{tg}(k_2 a/2),$$

причем $k_1/k_2 = \sqrt{\varepsilon} = 2$.

$$\mathrm{tg}(\sqrt{\varepsilon}\omega a/2c) = -\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{tg}(\omega a/2c) \text{ или } \mathrm{tg}(\omega a/2c) = -2\,\mathrm{tg}\frac{\omega a}{2c}.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\,2\theta = 2\,\mathrm{tg}\,\theta/(1 - \mathrm{tg}^2\,\theta) = -2\,\mathrm{tg}\,\theta$, где $\theta = \omega a/2c$. Сократив на $2\,\mathrm{tg}\,\theta \neq 0$, получим $1 = -1 + \mathrm{tg}^2\,\theta$, $\mathrm{tg}^2\,\theta = 2$, $\theta = \omega a/2c = \mathrm{arctg}\,\sqrt{2} \simeq 0,95$.

Минимальная частота до введения пластинки

$$\omega_{min}^{(0)} = \pi c/a = 3,14c/a$$

между пластинками укладывается половина длины волны. С пластинкой

$$\omega_{min}^{(\varepsilon)} = (2c/a)\,\mathrm{arctg}\,\sqrt{2} = 1,91c/a.$$

Таким образом, искомое изменение частоты

$$\triangle\omega = (3,14 - 1,91)c/a = 1,23c/a.$$

3. КОГЕРЕНТНОСТЬ, ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. ДИФРАКЦИЯ

Усредненная по времени интенсивность излучения равна

$$I = \overline{|u|^2} = \frac{1}{T}\int |u|^2 \mathrm{d}t = \overline{\mathrm{Re}\,u \cdot \mathrm{Im}\,u}. \quad (1)$$

Временная или продольная длина когерентности $l_{\shortparallel}$, ограничивающая возможную немонохроматичность, указывает на то, что интерференция двух волновых пакетов может иметь место только тогда, когда время τ запаздывания прихода одного из них меньше, чем время Δt жизни пакета.

$$l_{\shortparallel} = c\Delta t \sim c/\delta\nu \sim \lambda^2/\Delta\lambda, \quad (2)$$

где интервал излучаемых волн $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$.

Пространственная или поперечная длина когерентности $l_{\perp}$, ограничивающая возможную неточечность излучателя, указывает на то, что интерференция независимых излучателей может привести при наложении к смазыванию интерференционной картины:

$$l_{\perp} \sim \lambda/\Delta\alpha \sim \lambda R/L, \quad (3)$$

где $\Delta\alpha$ — угловой размер источника; L — поперечный размер; R — расстояние до точки наблюдения.

Функция видности, по Майкельсону,

$$V = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = |\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2\,\frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}, \quad (4)$$

где $\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ — комплексная степень когерентности;

$$0 \leq |\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2)| \leq 1. \tag{5}$$

Положение максимумов усредненной интенсивности:

$$\arg\left(\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)\right) = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2... \tag{6}$$

$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \overline{u(\vec{r}_1, t) u^*(\vec{r}_2, t + \tau)} \cdot \sqrt{I_1(\vec{r}) I_2(\vec{r})}$ — автокорреляционная функция.

Разность Δ оптических путей, отразившихся от параллельных поверхностей пленки толщиной d с показателем преломления n равна

$$\Delta = 2dn \cos\theta_0. \tag{7}$$

Радиус темных колец Ньютона в отраженном свете

$$r_m = \sqrt{R\lambda m}, \tag{8}$$

где R — радиус сферической линзы, а $m = 0, 1, 2...$

При отражении от среды оптически менее плотной (например, $n_1 = 4/3$ — вода, $n_2 = 1$ — воздух) происходит потеря половины волны.

Распределение интенсивности в интерферометре Фабри—Перо

$$I = \frac{I_0}{1 + 4\rho \sin^2(\delta/2)/(1-\rho)^2}, \tag{9}$$

где ρ — коэффициент отражения по интенсивности, а $\delta = k\Delta = (4\pi/\lambda)\, d \cos\theta_0$.

Разрешающая способность интерферометра Фабри—Перо

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{2\pi d}{\lambda} \frac{\sqrt{\rho}}{1-\rho}. \tag{10}$$

Коэффициент отражения

$$R = \frac{S_1}{S_0} = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2, \tag{11}$$

для нормального падения $R = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2}\right)^2$.

Коэффициент прохождения

$$D = \frac{S_2}{S_0} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2, \qquad (12)$$

для нормального падения $D = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$, $D + R = 1$.

При наличии слоя толщиной d с учетом многократного отражения

$$R = \left(\frac{n_1n_3 - n_2^2}{n_1n_3 + n_2^2}\right)^2, \quad T = \frac{4n_1n_3n_2^2}{(n_1n_3 + n_2^2)^2} \qquad (13)$$

при оптической длине $n_\lambda L = (q - \frac{1}{2})\lambda_0/2$, $q = 1, 2, 3$ — четвертьволновой слой. Тогда при $n_2 = \sqrt{n_1n_3}$ $R = 0$ — «просветленная» или «голубая» оптика. При $n_2^2 \gg n_1n_3$ или $n_2^2 \ll n_1n_2$ $R = 1$ — «диэлектрическое зеркало».

Обобщенный принцип Гюйгенса, интеграл Кирхгофа или формула Релея—Зоммерфельда:

$$E(r_0) = \frac{1}{i\lambda}\int\int E(S)\frac{e^{ikr}}{r}\cos(\widehat{\vec{n}\vec{r}})\mathrm{d}S. \qquad (14)$$

Дифракция — расхождение волны, обусловленное ограничениями ее фронта. При $z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}\left[(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2\right]^2_{max}$ получаем дифракцию Френеля

$$E(r_0) = -\frac{e^{ikz}}{i\lambda z_p}\int\int U(x_1, y_1)e^{\frac{ik}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_1. \qquad (15)$$

Интеграл в точке P

$$E(P) = \frac{1}{i\lambda}\int E_0\frac{e^{ika_1}}{a_1}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cos\psi\mathrm{d}S$$

можно рассчитать, используя метод зон Френеля. Из точки P радиусом $r_n = a_2 + n\lambda/2$, где $n = 1, 2, ...$, проводим дуги, ограничивающие зоны. Площадь зоны $\Delta S = S_n - S_{n-1} = 2\pi h_n a_1 = \pi\frac{a_1a_2\lambda}{a_1+a_2}$,

$(\lambda \ll a_1, a_2)$,

$$h_n = \frac{a_2 n\lambda}{a(a_1 + a_2)}, \quad \rho_n = \sqrt{\frac{a_1 a_2 n\lambda}{a_1 + a_2}}. \tag{16}$$

Вклад n-й зоны Френеля

$$E_n = \frac{1}{i\lambda} \int E_0 \frac{e^{ika_1}}{a_1} \cos\psi_n \frac{e^{ikr}}{r} a_1^2 2\pi \sin\theta \mathrm{d}\theta =$$

$$= 2\,(-1)^{n+1} \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1 + a_2} \overline{\cos\psi_n}; \tag{17}$$

$$E(P) = \frac{E_1}{2} \pm \frac{E_n}{2}; \tag{18}$$

$$E_\infty(P) = \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1 + a_2},\ E_1 = 2E_\infty(P),\ E_{\infty-1}(P) = -E_1/2. \tag{19}$$

Фокусное расстояние зонной пластинки

$$f = \frac{r_m^2}{(m+1)\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, ... \tag{20}$$

При $z \gg k(x_1^2 + y_1^2)/2$ – дифракция Фраунгофера.

$$E(x_0, y_0, z) \ = \ \frac{e^{ik\left(z + \frac{x_0^2 + y_0^2}{2z}\right)}}{i\lambda z} \int\int E(x, y) \cdot e^{-ik_z \frac{x_0 x_1 + y_0 y_1}{z}} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1 \backsim$$

$$\backsim \ \int\int E(x, y) e^{-i(k_x x_1 + k_y y_1)} \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}y_1. \tag{21}$$

Дифракция на щели при нормальном падении

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)^2}. \tag{22}$$

Дифракция на N щелях (дифракционная решетка)

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \left(\frac{\sin Nv}{N \sin v}\right)^2, \tag{23}$$

где $u = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$, а $v = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$, $d = a + b$ – постоянная решетки.

Условия максимума: $d \sin\theta_{max} = m\lambda$.

Условия минимума $d \sin\theta_{min} = (m + q/N)\lambda$, $m = 0, 1 \ldots q = 0, 1 \ldots.$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{1}{mN} \text{ из } d \sin\theta = \left(m + \frac{1}{N}\right)\lambda = m\lambda'. \tag{24}$$

Дифракция на круглом отверстии

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{2J_1(u)}{u}\right)^2, \text{ где } u = \frac{2\pi a \sin\theta}{\lambda}; \tag{25}$$

$J_1(u_0) = 0$ при $u_0 = 3,83$, тогда

$$\sin\theta_{1min} = 0,61\lambda/a. \tag{26}$$

Прямоугольная призма с малым углом α при вершине осуществляет поворот плоского фронта на угол θ. $\theta = (n-1)\alpha = k_0\Delta + k_x x$. Происходит сдвиг по фазе $e^{i\varphi} = e^{k_0\Delta_0} \cdot e^{ik_x x}$, где $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, $k_x = 2\pi\theta/\lambda$.

Фокусировка собирающей линзой описывается фазовым множителем

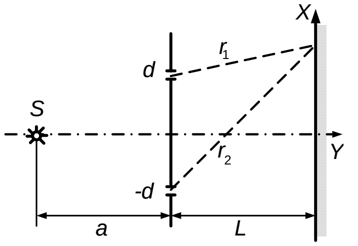
$$e^{i\Delta\varphi} = e^{-i\pi\frac{(x^2+y^2)}{\lambda F}}, \tag{27}$$

дефокусировка с мнимым фокусом $-F$

$$e^{i\Delta\varphi} = e^{i\pi\frac{(x^2+y^2)}{\lambda F}}. \tag{28}$$

3.1. Временная и пространственная когерентность. Видность. Степень когерентности и корреляционная функция [3]

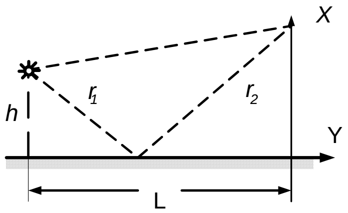
3.1. Два узких щелевых монохроматических источника света (длина волны λ)расположены на расстоянии L от экрана и на расстоянии $2d$ друг от друга.Найти расстояние между полосами на экране.



3.2. В схеме опыта Юнга найти распределение интенсивности на экране.

3.3. Определить показатель преломления стекла, если интерференционные полосы в схеме Юнга смещаются на величину Δx при помещении стеклянной пластинки толщиной h перед одной из щелей установки, расстояние между щелями d.

3.4. В схеме зеркала Ллойда найти распределение интенсивности на экране. Источник света — узкий, щелевой, монохроматический.



3.5. В опыте Ллойда (задача 3.4) расстояние от источника до экрана $L = 100$ см. При некотором положении источника ширина интерференционных полос на экране $\Delta x = 0,25$ мм, а после того как источник отодвинули от плоскости зеркала на $\Delta h = 0,6$ мм, ширина полос уменьшилась в $\eta = 1,5$ раза. Найти длину волны света.

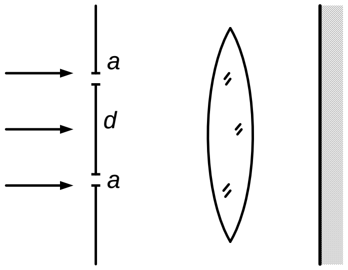
3.6. В схеме зеркала Ллойда (см. задачу 3.4) используется немонохроматический источник (диапазон длин волн $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$). Оценить, при каком значении x интерференционная картина на экране пропадет. Получить отсюда выражение для продольной (временной) длины когерентности.

[3] В задачах этого параграфа, как правило, предполагается бесконечная протяженность и однородность источников света и экранов по оси z, так что рисунки изображают сечения плоскостью $z = \mathrm{const}$.

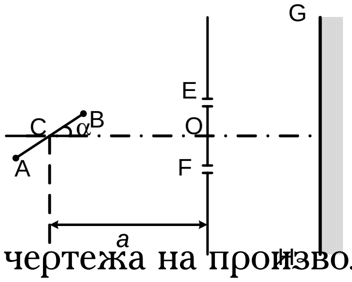
3.7. Схема Юнга (см. задачу 3.2) освещается двумя узкими щелевыми монохроматическими источниками (длина волны — λ), расположенными на прямой, параллельной экрану со щелями на расстоянии a от него. При каком расстоянии h между источниками интерференционная картина на экране пропадет? Оценить отсюда выражение для поперечной длины когерентности.

3.8. Две параллельные щели (расстояние между ними — d) освещены протяженным некогерентным источником, расположенным на расстоянии l от них. Источник имеет вид щели высотой h и шириной a . Найти видность $V(a)$ интерференционных полос.

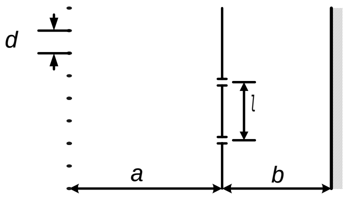
3.9. В схеме Юнга, освещенной лазером, щели имеют ширину a, расстояние между их серединами d. Экран, на котором регистрируется картина, подсвечивается «паразитным» фоном, интенсивность которого в 8 раз меньше интенсивности главного максимума интерференционной картины. При каком соотношении d/a полосы еще видны (видность интерференционной картины $V \geq 0,5$)?



3.10. Три одинаковых линейных некогерентных источника с длиной волны λ освещают схему Юнга. Два из них закреплены на стержне ACB размером $2d$ симметрично относительно центрального, так что могут со стержнем поворачиваться в плоскости чертежа на произвольный угол α $(OC = a, OE = OF = \frac{L}{2}; d, L \ll a)$. При каких значениях угла α видность V интерференционных полос на экране максимальна? Чему она равна?



3.11. N некогерентных линейных источников света расположены эквидистантно с интервалом d. На расстоянии a от них $(Nd \ll a)$ находится экран с двумя узкими щелями, параллельными источникам. Рас-



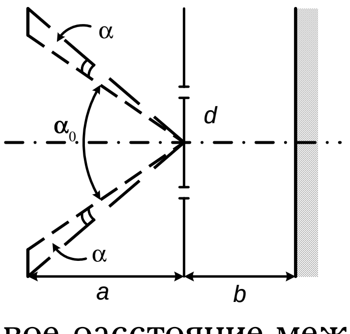
стояние между щелями l. Далее стоит экран на расстоянии b от первого. Найти, при каких d видность V обращается в единицу.

3.12. Рассчитать изменение видности интерференционных полос в схеме Юнга по мере увеличения ширины источника.

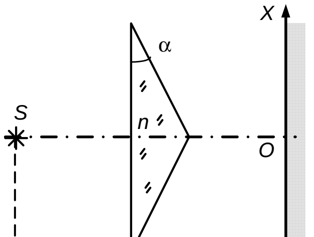
3.13. Самосветящаяся прямолинейная полоса в опыте Юнга имеет ширину $b = 1$ мм. Длина световой волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Расстояние между двумя узкими щелями $d = 0,5$ мм. На каком расстоянии от полосы надо разместить экран со щелями, чтобы можно было считать их когерентными источниками?

3.14. В схеме Юнга используется для освещения узкий щелевой источник видимого света с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Оценить, при каком расстоянии d между щелями могут быть различимы интерференционные полосы на экране с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см. Расстояние между экранами $l = 1$ м. Щели узкие.

3.15. На экране наблюдается картина интерференции от двух параллельных щелей, расположенных на расстоянии d друг от друга. Источник света находится на большом расстоянии $a \gg d$ от них и представляет собой две равномерно светящиеся полосы (длина волны — λ), параллельные щелям. Угловой размер каждой полосы α, а угловое расстояние между ними $\alpha_0 (\alpha, \alpha_0 \ll 1)$. Расстояние от экрана до щелей $b \gg d$. Найти зависимость видности V интерференционных полос от d.



3.16. Бипризма Френеля с углом при вершине $\alpha \ll 1$, показателем преломления n и расстоянием до экрана a освещается узким щелевым источником S, расположенным на расстоянии b от бипризмы на



оси симметрии. Излучение немонохроматично (диапазон длин волн $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$). На каком расстоянии от точки O на экране интерференционные линии станут неразличимыми из-за немонохроматичности источника?

3.17. Определить продольную и поперечную длины когерентности в непосредственной близости от лазера, работающего на длине волны $\lambda = 5\ 000$ Å с разбросом частот $\Delta\nu = 100$ Гц. Диаметр зеркал $D = 5$ см.

3.18. Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой интерференционную схему Юнга, в которой расстояние d между отверстиями может изменяться. Найти зависимость видности интерференционных полос в интерферометре Майкельсона от расстояния между отверстиями и длины волны λ при наблюдении: а) двойной звезды с угловым размером α (каждая компонента двойной звезды может рассматриваться как точечный источник, светимости обеих компонент одинаковы); б) звезды с большим угловым размером α (рассматривать ее как равномерно излучающий диск или даже как полосу, исправив результат).

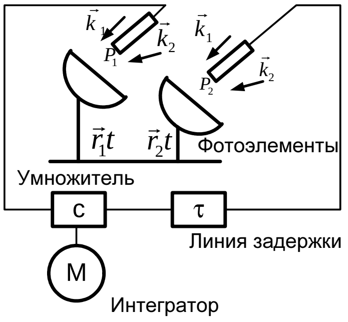
3.19. В звездном интерферометре Майкельсона при наблюдении: а) двойной звезды (система Капелла на расстоянии 44,6 световых лет) и б) красного гиганта (α-Бетельгейзе на расстоянии 652 световых года) видность интерференционных полос при увеличении расстояния между отверстиями ослабевает и при $D = D_0$ обращается в нуль. Определить: а) расстояние ρ_0 между компонентами двойной звезды ($D_0 = 70,8$ см, $\lambda = 5\ 000$ Å) и б) диаметр красного гиганта ($D_0 = 720$ см, $\lambda = 6\ 000$ Å).

Указание: первый корень функции Бесселя $J_1(x)$ равен $x_1 = 3,83...$, $J_1(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(t - x\sin t)\mathrm{d}t$.

3.20. Изображение Солнца (угловой диаметр $\alpha = 0,01$ рад; для

оценки диск можно заменить квадратом) получено при помощи линзы (с оптической силой $1/f = 1$ диоптрии) на отверстии экрана (размер отверстия равен размеру изображения). За этим экраном на расстоянии d от него помещен второй экран с двумя узкими параллельными щелями на расстоянии $a = 0,1$ см одна от другой. При каком расстоянии между экранами может наблюдаться интерференционная картина?

3.21. В интерферометре Брауна и Твисса независимо детектируются, а затем перемножаются и регистрируются интенсивности света, идущего от двух удаленных некогерентных точечных источников или от различных точек одного протяженного источника. Волны, идущие от источников, можно считать плоскими (волновые векторы — $\vec{k_1}$ и $\vec{k_2}$), их амплитуды и фазы флуктуируют случайным образом. Показать, что угловое расстояние между источниками может быть измерено наблюдением корреляции между интенсивностями.



3.22. Комплексная степень когерентности двух сигналов

$$y_i(t) = a_i(t)e^{i[\omega t+\varphi_i(t)]} \ (i = 1, 2)$$

определяется как

$$\Gamma(\tau) = \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{\overline{a_1^2}\,\overline{a_2^2}}}\frac{1}{T}\int\limits_0^T a_1(t)a_2(t+\tau)e^{i[\varphi_2(t+\tau)-\varphi_1(t)]}\mathrm{d}t;$$

$$\left(\overline{a_i^2} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T a_i^2(t)\mathrm{d}t\right),$$

где $T \gg 1/\omega \gg$ характерных времен изменения амплитуд a_i и фаз φ_i. Найти связь степени когерентности $\gamma(\tau) = \mathrm{Re}\{\Gamma(\tau)\}$ этих сигналов с

видностью интерференционной картины на экране в схеме Юнга, если каждое из отверстий (щелей) испускает сигнал y_i.

3.23. Вычислить степень когерентности для перечисленных далее последовательностей волновых цугов: а) амплитуда цугов постоянна, а фаза принимает случайные значения в моменты времени $t_k = kT_0$ $(k = 0, 1, 2...)$; б) амплитуда цугов постоянна и имеется N_k цугов, фаза которых в течение времени $\overline{T}$ постоянна; в) число цугов dN, фаза которых постоянна в течение отрезков времени от T до $T + dT$, распределено по Пуассону: $dN = \frac{T}{\overline{T}^2} e^{\frac{-T}{\overline{T}}} \mathrm{d}t$ (так что $\int\limits_0^\infty \mathrm{d}N = 1$); г) фаза неизменна, а амплитуда цугов принимает случайные значения в моменты времени $t_k = kT_0$ $(k = 0, 1, 2...)$, так что распределение амплитуд характеризуется величинами $\overline{a}$ и $\overline{a^2}$.

3.24. Монохроматический источник в схеме Юнга включается на время τ, малое по сравнению с постоянной времени системы наблюдения T. а) Найти интерференционную картину и ее видность. б) То же для случая, когда источник включается периодически с периодом T_0. Исследовать предельные случаи: $T_0 \to \tau$ и $T_0 \to \infty$.

3.25. Вычислить степень когерентности немонохроматического излучения, имеющего спектр $I(\omega - \overline{\omega})$, где $\overline{\omega}$ — средняя частота.

3.26. Две поляризованые по кругу в противоположных направлениях монохроматические волны с близкими частотами $(\omega \pm \Delta\omega)$, имеют одинаковые фазы и распространяются в одном направлении. Амплитуды волн равны. Найти поляризацию результирующей волны.

3.27. Вычислить степень когерентности при доплеровском механизме возникновения немонохроматичности и максвелловском распределении атомов по скоростям (см. задачу 1.14).

3.28. Вычислить степень когерентности колебаний в двух точках, освещаемых протяженным некогерентным линейным источником света.

3.29. Найти связь автокорреляционной функции $\Gamma(\vec{r},\vec{r},\tau) = \overline{u(\vec{r},t)u^*(\vec{r},t+\tau)}$ со спектром мощности $I(\omega)$ излучения. Интенсивность излучения $I = \overline{u^*(t)u(t)} = \int\limits_0^\infty I(\omega)\mathrm{d}\omega$.

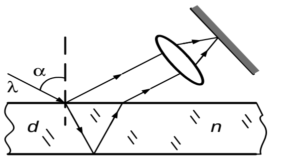
3.30. Найти автокорреляционную функцию излучения, если линия испускания узкая и имеет прямоугольную форму в интервале шириной $\Delta\omega$ около ω_0. Интенсивность излучения I_0.

3.31. Найти спектры мощности для последовательности прямоугольных импульсов длительности T_0, если: а) знак импульсов меняется случайно, причем положительные и отрицательные импульсы равновероятны; б) амплитуда импульсов с равной вероятностью принимает значения $\pm E_0, \pm\frac{E_0}{2}$, 0; в) последовательность импульсов из пункта «а» заполнена синусоидальным сигналом $e^{i\omega_0 t}$.

3.32. Найти спектры мощности для сигналов из задачи 3.23.

3.2. Интерференция. Линии равного наклона и равной толщины. Интерферометры

3.33. Под углом α на стеклянную пластинку толщиной d с показателем преломления n падает плоская волна (длина волны λ). Найти условия образования интерференционных максимумов и минимумов отраженного света.



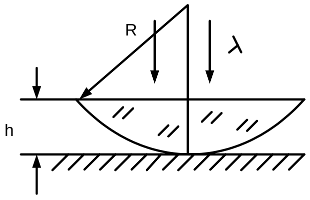
3.34. Принимая интенсивность падающего пучка за единицу, найти интенсивность проходящего и отраженного пучков при многократной интерференции на плоскопараллельной пластинке (поглощение света отсутствует).

3.35. Решить задачу 1.20, рассмотрев многократные отражения волны от границ раздела.

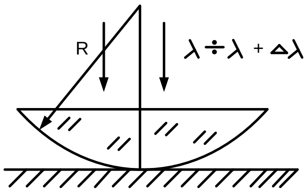
3.36. От точечного монохроматического источника света на стеклянный клин с углом α между гранями и показателем преломления n

под углом φ падает излучение с длиной волны λ. а) Найти расстояние между полосами в отраженном свете. б) То же, если на клин по нормали падает плоская волна.

3.37. Найти радиусы интерференционных колец (колец Ньютона) в проходящем (а) и отраженном (б) свете на воздушном клине между зеркалом и плосковыпуклой линзой (ее радиус $R \gg h$ — толщины линзы). Длина волны — λ.



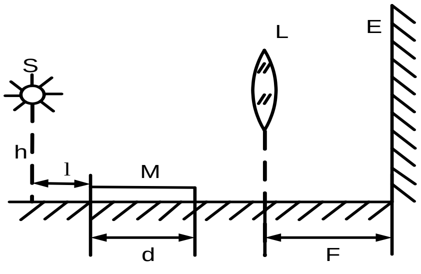
3.38. При освещении плоско-выпуклой линзы радиуса кривизны R, лежащей на зеркале, пучком параллельных лучей, которые прошли через цветной фильтр, пропускающий свет с длинами волн в диапазоне $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$, наблюдаются кольца Ньютона. Оценить, при каком значении радиуса темного кольца произойдет замазывание интерференционной картины.



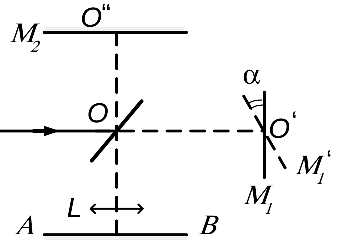
3.39. Плоская волна, проходя через матовую поверхность, становится диффузной (матовое стекло «непрозрачно»). Покрытие матового стекла водой или, лучше, бензолом или глицерином $(n \approx 1,50)$ просветляет его. Почему? При каких размерах неровностей стекло будет матовым?

3.40. Воздушный клин между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками освещается рассеянным монохроматическим светом (длина волны λ; $\Delta\lambda \ll \lambda$). Полосы равной толщины наблюдаются на клине невооруженным глазом (зрачок — $d = 5$ мм) с расстояния наилучшего зрения $L = 25$ см по нормали к клину (угол клина очень мал). Оценить: а) максимальное число полос N, которое можно увидеть, перемещая глаз вдоль клина (поперек его ребра); б) степень монохроматичности света $\Delta\lambda/\lambda$, необходимую для наблюдения такого числа полос.

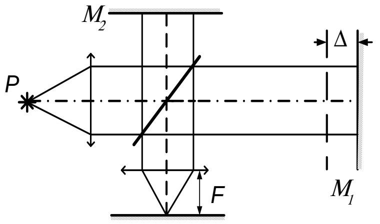
3.41. На рисунке изображена интерференционная схема: линейный (поперек плоскости чертежа) монохроматический источник S, зеркало M и экран E, расположенный в фокальной плоскости линзы. а) Найти расстояние между интерференционными полосами на экране. б) Оценить размер зеркала d, при котором дифракция на апертуре замазывает интерференционную картину.



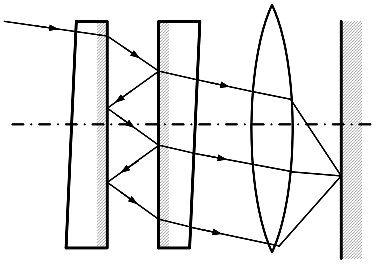
3.42. Интерферометр Майкельсона освещается монохроматическим светом с длиной волны λ. Разность плеч $d = OO' - OO''$. Найти расстояние между m и $m+1$ максимумами на экране AB, расположенном в фокальной плоскости объектива L с фокусным расстоянием f, если интерферометр работает: а) в режиме «линий равного наклона» (зеркало M вертикально, свет от точечного источника идет под разными углами θ); б) в режиме «линий равной толщины» (зеркало M_1 наклонено под малым углом α к вертикали, свет от источника идет параллельным пучком).



3.43. Одно из зеркал M_1 в интерферометре Майкельсона движется с постоянной скоростью начиная с положения, соответствующего нулевой разности хода ($\Delta = 0$), оставаясь все время перпендикулярным к падающему на него световому пучку. Найти интенсивность света, падающего на фотоэлемент F в случаях, когда источник P: а) монохроматичен; б) его спектр содержит две линии; в) его спектр является гауссовским (центр в ω_0, ширина $\delta\omega$).



3.44. Эталон Фабри—Перо представляет собой плоскопараллельную пластину, обычно воздушную, образующуюся между двумя



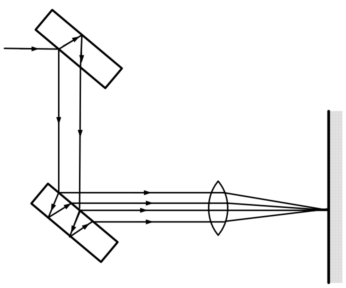
плоскими поверхностями тщательно отшлифованных и отполированных стеклянных или кварцевых пластинок, установленных так, чтобы поверхности, обращенные друг к другу, были строго параллельны. Интерференционные полосы при этом имеют вид концентрических колец. а) Как располагаются полосы различных порядков? б) Как зависит ширина полосы от порядка интерференции, длины волны, толщины эталона h?

3.45. Как изменится размер интерференционных колец при замене воздушной прослойки в эталоне Фабри—Перо на стеклянную (показатель преломления $n = 1,5$)?

3.46. На интерферометр Фабри—Перо перпендикулярно его плоскостям падает плоская волна с непрерывным «прямоугольным» спектром в диапазоне длин волн $\lambda \pm \Delta\lambda$. Определить спектр излучения на выходе интерферометра, если расстояние между его плоскостями $a = 2,5$ см, коэффициенты пропускания и отражения по интенсивности равны $\tau^2 = 0,2$ и $\rho^2 = 0,8$ ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см, $\Delta\lambda = 6 \cdot 10^{-10}$см).

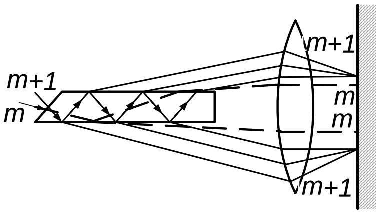
3.47. Воздушная прослойка в интерферометре Фабри—Перо заменена слоем криолита ($n = 1,35$). При какой минимальной толщине этого слоя интерферометр будет работать как фильтр, пропускающий при нормальном падении видимого света излучение только с длиной волны $\lambda = 5,6 \cdot 10^{-5}$ см (диапазон длин волн видимого света $(4 \div 7,5) \cdot 10^{-5}$ см)? Как изменится результат при наклонном падении?

3.48. Интерферометр Жамена представляет собой две идентичные плоскопараллельные пластинки (толщина — h, показатель преломления — n), расположенные под небольшим углом α. Найти ширину интерференционных полос при падении



света на интерферометр под углом φ. Чему равен α, если при $\varphi = 49^0$ наблюдается максимум пятого порядка для $\lambda = 5 \cdot 10^3$ Å при ширине полосы $\Delta x = 3,84$ мм.

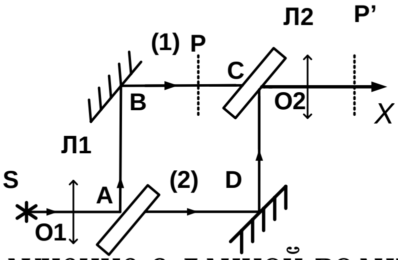
3.49. Полосы разного порядка в пластинке Люммера—Герке (плоскопараллельная с высокой степенью точности пластинка, изготовленная из очень однородного стекла) располагаются по обе стороны пластинки. а) Где лежат полосы высших порядков? б) Как зависит ширина полосы от порядка интерференции, длины волны, толщины пластинки?



3.50. Как изменится интерференционная картина, создаваемая пластинкой Люммера—Герке из крона $(n_0 = 1,50)$, если одна ее поверхность будет погружена в сероуглерод $(n_1 = 1,75)$?

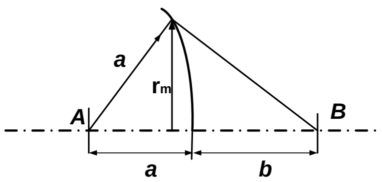
3.51. Линии равного наклона или равной толщины регистрируются: а) в интерферометре Майкельсона; б) в эталоне Фабри—Перо; в) в интерферометре Жамена; г) в пластинке Люммера—Герке.

3.52. Интерферометр Рождественского—Маха—Цандера изображен на рисунке. B и D — зеркала, A и C — полупрозрачные пластины-делители. $AB = CD = f$, $BC = AD = 2f$. Л$_1$ и Л$_2$ — линзы. Точечный источник S, помещенный в фокусе линзы Л$_1$, испускает излучение с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см. Зеркало D слегка поворачивают на малый угол $\alpha = 2'$. Найти интервал между интерференционными полосами, если $CO_2 = f$.



3.3. Зоны Френеля. Дифракция Френеля

3.53. Найти радиус r_m m-й зоны Френеля. Чему он будет равен,



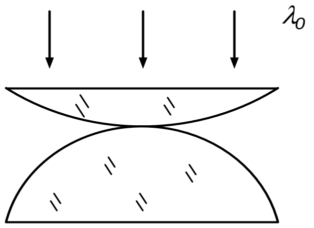
если падающая волна плоская? Доказать, что площади зон Френеля равны. Найти вклад в амплитуду колебания в точке B от m-й зоны Френеля.

3.54. Получить оценку вклада в колебание в точке B (см. рисунок к задаче 3.53) при открытии и закрытии произвольного числа зон Френеля. В частности, когда: а) закрыты все зоны, кроме первой; б) закрыты все четные зоны; в) фаза всех четных зон изменена на π.

3.55. Определить максимальное фокусное расстояние зонной пластинки Френеля, если ее m-й радиус равен r_m ($m = 5$, длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см; $r_5 = 1,5$ мм). Что произойдет, если пространство между зонной пластинкой и экраном заполнено средой с показателем преломления n $(n > 1)$?

3.56. Какова интенсивность I света в фокусе зонной пластинки Френеля, если закрыть все зоны, кроме: а) первой? б) верхней половины первой зоны? Интенсивность света без пластинки равна I_0.

3.57. Найти фокусное расстояние для длины волны λ у зонной пластинки, полученной в результате фотографирования с увеличением k в проходящем свете с длиной волны λ_0 двух соприкасающихся выпуклыми сторонами плоско-выпуклых линз с радиусами кривизны R_1 и R_2. Свет падает по нормали к плоскостям линз.



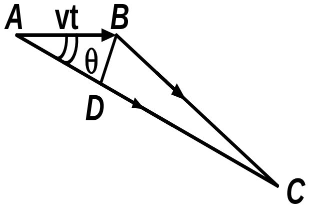
3.58. Изображение ярко светящегося источника на фотопластинке было получено с помощью гладкого непрозрачного шара радиуса R, помещенного между источником и пластинкой на расстоянии f от нее. Расстояние между источником и шаром — d. Найти отношение размеров источника и изображения. При каких условиях можно заменить шар диском?

3.59. Используя представление о зонах Френеля, показать, что поле дифрагированной волны определяется интегралом Кирхгофа: $E = \int\int \frac{E_0 e^{ikr}}{i\lambda r}\cos\psi \mathrm{d}s$, т. е. что точки волнового фронта являются источниками вторичных сферических волн с фазой, сдвинутой на $\frac{\pi}{2}$, амплитудой, уменьшенной в λ раз, и учетом угла ψ, характеризующего угол между нормалью к фронту и радиусом, проведенным в точку наблюдения.

3.60. Используя принцип Гюйгенса — Френеля, получить закон отражения и преломления плоской волны на границе двух сред.

3.61. Используя принцип Гюйгенса — Френеля, рассмотреть качественно дифракцию сферической волны на щели.

3.62. В среде с показателем преломления n движется заряженная частица со скоростью $v > \frac{c}{n} = v_{\text{фаз}}$. Рассмотрев интерференцию излучения, получить выражение для угла θ, под которым будет регистрироваться свет.



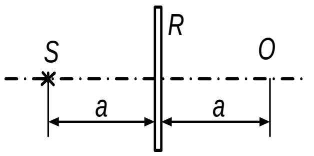
3.63. Точечный источник света расположен на оси, проходящей через центр круглого непрозрачного экрана радиуса a перпендикулярно его плоскости. В приближении геометрической оптики $(\lambda \ll a)$ найти интенсивность света в симметричной относительно экрана точке P.

3.64. В предыдущей задаче рассмотреть дифракцию на дополнительном экране.

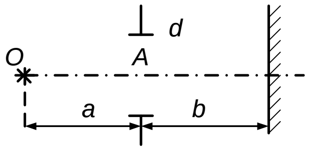
3.65. Монохроматический с длиной волны λ точечный источник света S находится на расстоянии l от плоского экрана с круглым отверстием. При каком минимальном радиусе отверстия освещенность в симметричной относительно экрана точке будет максимальной? Во сколько раз эта освещенность больше освещенности, получающейся в этой точке при отсутствии экрана?

3.66. Найти порядок величины наименьшей ширины светового пучка, получающегося от параллельного пучка света на расстоянии l от диафрагмы.

3.67. Посередине между точечным источником и экраном помещен непрозрачный диск радиусом R. Плоскость диска параллельна экрану, а его ось проходит через источник. На экране в точке O — светлое пятно. В центре диска сделали круглое отверстие. При каком минимальном радиусе отверстия в точке O будет темно? Каким при этом должен быть радиус диска?



3.68. Точечный источник света с длиной волны λ находится на расстоянии a от щели ширины d. Прямая , соединяющая источник света с серединой щели, перпендикулярна плоскости экрана. Найти приближенное выражение для расстояния x между центральным максимумом и первым дифракционным минимумом на экране, считая, что углы дифракции малы. При каких ограничениях на параметры дифракционная картина не зависит от смещения источника вдоль OA?



3.69. Рассчитать дифрагировавшую волну при гауссовом распределении амплитуд на волновом фронте (аподизация).

3.70. В одном из методов измерения угловых размеров звезд используется дифракция света от звезды на крае Луны во время новолуния. Угловой размер звезды при этом определяется сравнением зарегистрированной дифракционной картины с теоретической, вычисленной в предположении, что звезда излучает как равномерно светящийся диск. Оценить, какие угловые диаметры звезд доступны измерению этим методом. Оценить допустимую высоту неровностей лунной поверхности для реализации этого метода.

3.4. Дифракция Фраунгофера. Дифракционные решетки

3.71. Условие того, что френелева дифракция на отверстии практически совпадает с фраунгоферовой, заключается в том, что максимальная разность фаз двух лучей, идущих от разных точек отверстия к экрану, на котором наблюдается дифракционная картина, мала по сравнению с π. Выразить это условие через размеры отверстия d, длину волны λ и расстояние от экрана до места наблюдения r.

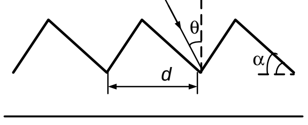
3.72. Найти угловое распределение интенсивности света при дифракции Фраунгофера на экране: а) с одной щелью шириной b; б) с двумя щелями ширины b и расстоянием a между ними. В случае «а» оценить относительные интенсивности максимумов, ближайших к главному.

3.73. Найти угловое распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера в случае нормального падения света на решетку из N щелей с периодом d. Ширина щели b $(d = a + b)$.

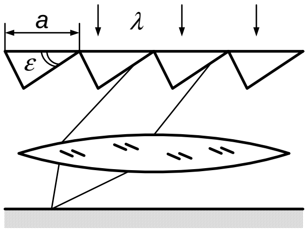
3.74. Показать, что если период решетки d и ширина щели b соизмеримы $(d = nb)$, то в спектре решетки исчезают все максимумы, номера которых кратны числу n.

3.75. Как изменится угловое распределение интенсивности, если на решетку из задачи 3.73 свет падает под углом α ? Под каким углом проходит максимальное изучение?

3.76. На дифракционную отражающую решетку, параметры которой даны на рисунке, свет падает под углом θ. Каков порядок спектра, имеющего максимальную интенсивность? Какая ширина $\Delta\lambda$ спектра (при длине волны λ) может быть получена при этом без перекрытия спектров соседних порядков?

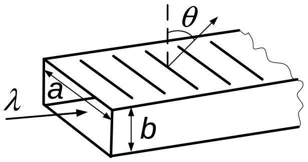


3.77. Дифракционная (фазовая) решетка состоит из N клиньев,



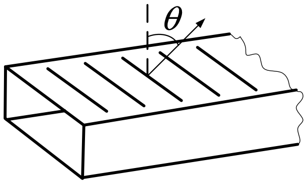
длины a каждый, с углом ε при вершине и освещается плоской монохроматической волной (длина волны — λ), падающей по нормали к решетке. Найти направление на главный максимум и его порядок.

3.78. В длинном с прямоугольным сечением a x b волноводе



возбуждается волна типа H_{10} с длиной λ. В узкой стенке (a) волновода прорезаны N поперечных узких щелей $N \gg 1$ с периодом d. Найти направление максимального излучения получившейся антенны.

3.79. В прямоугольном волноводе с размерами a x b $(a > b)$ рас-

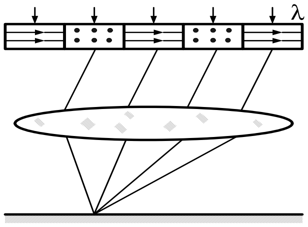


пространяется слабо затухающая волна H_{10} с частотой ω и длиной затухания δ. В боковой узкой стенке прорезаны узкие параллельные щели с периодом d. Найти угловое распределение $I(\theta)$ излучения из щелей. Какое количество щелей эффективно участвует в излучении?

3.80. В дифракционной решетке $N \gg 1$ щелей. Пропускная способность каждой последующей щели по амплитуде в $k = 2$ раз меньше, чем у предыдущей, а фазы при прохождении соседних щелей различаются на $\alpha = \pi$. Размер щели мал. Расстояние между щелями — d. Найти интенсивность света в зависимости от угла дифракции θ. Свет с длиной волны λ падает на решетку по нормали. Интенсивность света, прошедшего через первую щель, равна I_0.

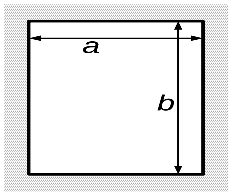
3.81. Параллельный пучок света падает на круглое отверстие в непрозрачном экране перпендикулярно его плоскости. Найти распределение интенсивности на средней линии за экраном. В каких точках темно?

3.82. Дифракционная решетка составлена из чередующихся полос



поляроидов с взаимно ортогональными направлениями поляризации. Полное число полос — $2N$. Ширина каждой — a. Найти угловое распределение интенсивности света $I(\theta)$. Свет с интенсивностью I_0 хаотически поляризован и падает на решетку по нормали к ней.

3.83. Найти угловое распределение интенсивности света, дифрагированного на изображенном (см. рисунок) симметричном отверстии.



3.84. Параллельный пучок света падает на кольцевое отверстие в непрозрачном экране перпендикулярно его поверхности. Найти угловое распределение интенсивности света за экраном.

3.85. Найти угловое распределение интенсивности за экраном с круглым отверстием при наклонном падении на него параллельного пучка света.

3.86. Оценить из дифракционных соображений, может ли орел с высоты 1 км разглядеть мышонка размером 2 см или он сможет лишь обнаружить его присутствие?

3.87. Размер Венеры около $1,3 \cdot 10^4$ км. Видим ли мы ее на небе как точечную звезду или замечаем «кружок» подобно матери Галилея? До Солнца — $1,5 \cdot 10^8$ км.

3.88. Проверить, будут ли разрешимые по критерию Рэлея две самосветящиеся точки разрешимы глазом по 15 %-му критерию (глаз различает две близкие точки, если максимумы освещенности в местах их геометрических изображений превосходят интенсивность посредине между ними не менее чем на 15 %).

3.89. Проверить, будут ли разрешимые по критерию Рэлея изображения двух несамосветящихся точек разрешимы глазом по 15 %-му

критерию в трех случаях: а) точки освещаются пучком лучей, параллельных главной оптической оси; б) осветительный пучок наклонен к главной оптической оси; в) точки освещаются диффузным светом.

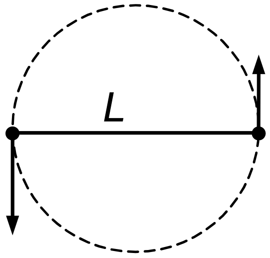
3.90. а) Считая, что при естественном освещении наибольшее количество света приходится на $\lambda \approx 5\,500$ Å, найти минимальное разрешаемое угловое расстояние для глаза при адаптации на небольшие яркости (диаметр зрачка $d = 4$ мм); б) найти наименьшее разрешаемое глазом расстояние между штрихами, начерченными на листе бумаги, находящимся на расстоянии ясного зрения ($L = 25$ см).

3.91. Какова должна быть минимальная длина отрезка на Луне и Солнце, чтобы его изображение в рефлекторе с диаметром зеркала в 6 м можно было отличить от изображения точки?

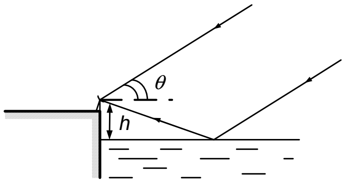
3.92. Найти разрешающую способность в спектре m-го порядка: а) дифракционной решетки ($2N$ щелей); б) решетки из задачи 3.82, после того как в ней будут зачернены полосы с поперечной поляризацией. Сравнить полученные результаты.

3.93. Дифракционная решетка размером $L = 4$ см и с числом штрихов на единицу длины $n = 2\ 000$ штр/мм освещается сначала монохроматическим зеленым светом, а потом светом газового аргонового разряда $(A = 40)$ с температурой $T = 10$ эВ с той же длиной волны λ. В каком порядке m можно увидеть уширение линии?

3.94. Две близких по массе звезды движутся по окружности диаметром $L = 2{\cdot}10^7$ км под влиянием взаимного тяготения. Температура поверхности звезд $T = 6{\cdot}10^3 K$. Оценить, каким должен быть их период обращения τ и минимальное число N штрихов в дифракционной решетке, чтобы при наблюдении линий в спектре излучения водорода этих звезд можно было во втором порядке зарегистрировать их движение по окружности. Луч зрения лежит в плоскости орбиты.



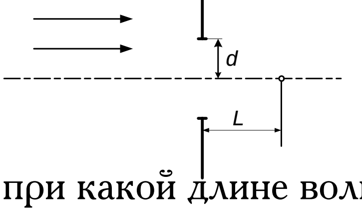
3.95. Радиотелескоп с антенной диаметром D работает на волне длиной $\lambda \div \lambda + \Delta\lambda$ по интерференционной схеме зеркала Ллойда. В качестве зеркала используется поверхность спокойного моря. Определить: а) угловое разрешение телескопа; б) при каком возвышении над уровнем моря изображенная схема дает выигрыш по сравнению с прямым наблюдением объекта; в) каково максимально допустимое возвышение над морем; г) при каком угле наблюдения θ_0 будет зарегистрирован первый максимум.



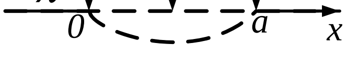
3.96. Для увеличения разрешающей способности радиотелескопов предлагалось использовать дифракцию радиоволн от края Луны (см. задачу 3.70). Оценить разрешающую способность этого метода для радиоволн. Каковы допустимые высоты неровностей поверхности для реализации этого метода (диаметр Луны $D = 3\,470$ км)?

3.97. Один из возможных способов увеличения разрешающей способности радиотелескопов состоит в регистрации дифракционного максимума интенсивности радиоизлучения, получающегося в центре геометрической тени Луны от точечного источника. Оценить разрешающую способность этого метода и допустимую высоту неровностей лунной поверхности.

3.98. На непрозрачный экран с отверстием радиуса d по нормали падает плоская монохроматическая волна. На расстоянии L от экрана на оси отверстия регистрируется интенсивность излучения I. а) Начертить график зависимости $I(\lambda)$. б) Оценить, при какой длине волны λ_0 надо учитывать дифракцию.



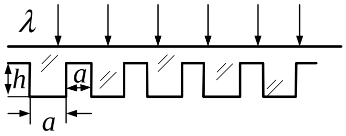
3.99. На щель шириной a перпендикулярно плоскости экрана падает плоская волна. Длина волны — λ. На щель нанесли прозрачное покрытие, которое изменяет амплитуду проходящей волны по за-



кону $E = E_0 \sin(\frac{\pi x}{a})$, где x отсчитывается от края щели. Найти интенсивность $I(\theta)$ волны, прошедшей через щель под углом θ к первоначальному направлению.

3.100. Определить дифракционную картину при нормальном падении света на фазовую синусоидальную решетку конечной апертуры.

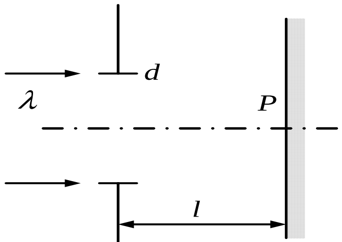
3.101. Прозрачная периодическая структура с показателем преломления n освещается плоской монохроматической волной, падающей нормально на верхнюю границу. Подобрать глубину h так, чтобы главные фраунгоферовы дифракционные максимумы первого порядка имели наибольшую интенсивность. Какова при этом интенсивность нулевого максимума?



3.102. Вычислить мощность на единицу площади экрана в фокусе линзы (ее радиус $a = 2$ см, фокусное расстояние $F = 10$ см), создаваемую потоком света от Солнца ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см, угловой размер Солнца $\theta_0 = 5 \cdot 10^{-3}$, от Солнца к Земле приходит мощность $I_0 = 0,14$ Вт/см^2). Во сколько раз уменьшится результат, если удалиться от Солнца на расстояние l, равное четырем световым годам.

3.103. Линза с фокусным расстоянием F, диаметром d_0 фокусирует пучок света лазера сечением $d_1 < d_0$. Длина световой волны λ. а) Оценить размер пятна на экране, размещенном в фокальной плоскости линзы. б) Во сколько раз линза увеличивает интенсивность света в фокусе? в) Оценить давление света в фокусе на экран, задав мощность лазера в импульсе $W = 500$ МВт и выбрав остальные параметры самостоятельно.

3.104. На экран с отверстием диаметром d падает свет от Солнца, пропущенный через светофильтр (длина волны — λ). На втором экране точка P — центр светлого кружка. Расстояние между экранами l. С целью компенсировать разность фаз, создаваемую разностью хода



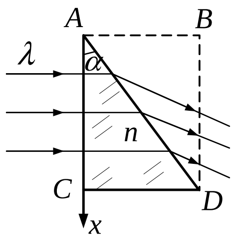
от разных точек отверстия до точки P экрана, в отверстие поместили прозрачное покрытие с толщиной, плавно спадающей от оси к периферии. Пренебрегая возникшим при этом отражением от покрытия, оценить, во сколько раз увеличилась освещенность в точке P. Угловой размер Солнца $\alpha_\odot$ невелик.

3.105. Во сколько раз возрастает освещенность, если свет от Солнца концентрируется линзой с относительным отверстием $d/f = 0,2$?

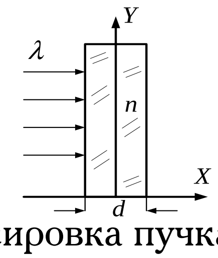
3.106. Рассмотреть дифракцию Фраунгофера на большом числе хаотически распределенных малых экранов.

3.5. Фурье-оптика. Голография

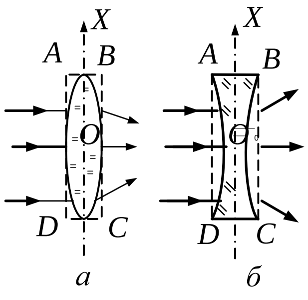
3.107. Плоская волна (длина волны — λ) падает почти нормально на боковую поверхность тонкой призмы с углом $\alpha \ll 1$ при вершине и показателем преломления n. Найти зависимость от x фазового сдвига, приобретенного волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята призмой.



3.108. Плоская волна падает на прямоугольный плоский сосуд с газом, плотность которого с высотой y падает, так что показатель преломления меняется по закону: $n(y) = n_0(1 - \frac{y^2}{2L^2})$. Ширина сосуда — d. На каком расстоянии от сосуда произойдет фокусировка пучка?



3.109. Плоская волна падает на тонкую собирающую или рассеивающую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления n. Длина волны — λ, угол между волновым вектором и оптической осью линзы мал. Найти зависимость от



X фазового сдвига, приобретаемого волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята линзой.

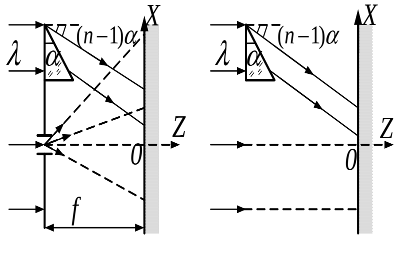
3.110. Найти, используя интеграл Кирхгофа (обобщенный принцип Гюйгенса), изображение предмета, расположенного на расстоянии a от тонкой линзы (фокусное расстояние f; изображение получается с помощью параксиального пучка света на расстоянии b, удовлетворяющем формуле линзы $1/a + 1/b = 1/f$).

3.111. Показать, что если предмет расположен в передней фокальной плоскости линзы, то распределение амплитуд поля в задней фокальной плоскости представляет собой фурье-образ функции пропускания предмета. Рассмотреть, что получится, если предмет расположен вплотную к линзе.

3.112. Найти создаваемое линзой конечной апертуры изображение точечного источника, находящегося на оси линзы (ограничиться приближением Фраунгофера).

3.113. На длиннофокусную собирающую линзу с ирисовой диафрагмой падает параллельный пучок монохроматического света. На расстоянии a от линзы помещен экран, на котором наблюдаются дифракционные кольца. При каких радиусах диафрагмы центр колец будет темным и при каких светлым, если фокусное расстояние линзы равно f?

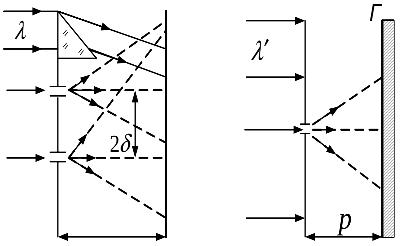
3.114. Найти распределение интенсивности I по поверхности голограммы, полученной при перекрытии опорной плоской волны (попавшей на голограмму после прохождения тонкой призмы с углом преломления $\alpha \ll 1$ и показателем преломления n), и а) предметной сферической волны от точечного источника, расположенного на расстоянии f от голограммы; б) плоской предметной волны.



а б

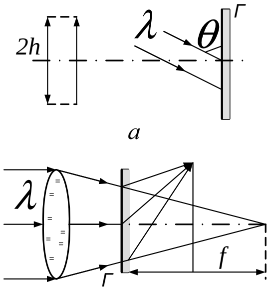
3.115. Найти пропускание T голограмм, полученных в предыдущей задаче (голограммы проявлены до коэффициента контрастности $\gamma = -2$, где $T \sim I^{-\gamma/2}$; считать, что при экспонировании голограмм интенсивность опорной волны была много больше интенсивности предметной волны). Найти волновое поле за голограммами в обоих случаях при освещении ее нормально падающей плоской волной (той же длины волны).

3.116. Найти распределение интенсивности по поверхности голограммы, полученной при перекрытии плоского опорного и двух сферических предметных пучков (отверстия находятся в плоскости призмы на расстоянии 2δ друг от друга). Голограмма проявлена до коэффициента контрастности $\gamma = -2$. Изображение восстанавливается с помощью точечного источника, размещенного на расстоянии p от голограммы и имеющего другую длину волны λ'. Найти волновое поле за голограммой и описать физический смысл получившихся выражений. Показать, что: а) действительное изображение находится на расстоянии q от голограммы, таком, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{\lambda'}{\lambda f}$; б) линейное увеличение равно $M = \frac{2\Delta}{2\delta} = 1 + \frac{q}{p}$.



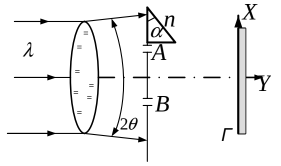
а б

3.117. Голограмму экспонировали по схеме голографии Френеля. Опорный угол — θ, расстояние от предмета с поперечным размером $2h$ до фотопластинки — l (см. рисунок *а*). Голограмму восстанавливают в лазерном пучке света, сфокусированном на расстоянии f от нее (см. рисунок *б*). Найти расстояние от изображения до голограммы и его размер.



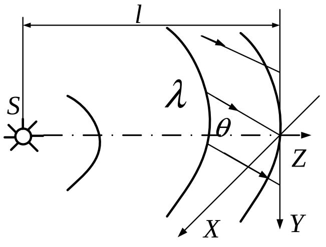
3.118.[б] Рассмотреть предыдущую задачу при восстановлении изображения с помощью расходящегося пучка света.

3.119. Голограмму экспонируют по схеме Френеля в пучке света



длиной волны λ, расходящемся в конусе с углом θ. Найти расстояние между изображениями двух точечных источников A и B при восстановлении голограммы с помощью плоского пучка.

3.120. Голограмма точечного источника S экспонируется по схеме



Френеля. Разрешение фотоматериала $\delta \gtrsim \lambda$ (длины волны излучения). Какой минимальный размер фотопластинки нужно выбрать, чтобы зря не расходовать фотоматериалы и записать (с учетом конечного разрешения δ) максимальную информацию об объекте? Где при этом должен быть центр пластинки? Найти распределение плотности почернения по поверхности голограммы $I(x, y)$.

3.121. Фурье-голограмму точечного предмета регистрируют на фотопластинке в пучке света длиной волны λ, а восстанавливают в пучке света длиной волны λ'. Найти изображение, если предмет и опорный пучок отстояли на расстоянии Δ. Рассмотреть безлинзовый и линзовый варианты.

3.122. Голограмма Фурье точечного предмета при проявлении получила переменную толщину чувствительного слоя $d(x) = d_0 - \varkappa x^2$. Как изменится изображение предмета при восстановлении?

3.123. Сравнить разрешающие способности голограммы Френеля и Фурье (рассмотреть схемы, использованные в задачах 3.112 и 3.118).

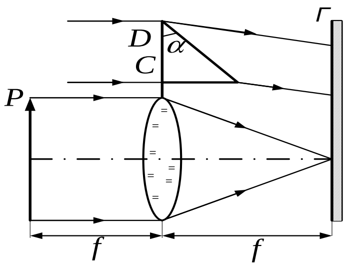
3.124. Голограмма получена при экспонировании толстослойной эмульсии (голограмма Денисюка), на которую под углом α падает опорный плоский пучок (длина волны — λ), а под углами β_i $(i = 1, 2)$ — две «предметных» плоских волны. а) Под каким углом следует освещать голограмму при восстановлении? б) Какова при этом разница между действительным и мнимым изображениями?

в) Что будет, если при восстановлении голограмму освещать белым светом?

3.125. Голограмма Денисюка (см. предыдущую задачу) экспонирована последовательно в свете трех лазеров (с разными λ). Найти изображение, полученное при восстановлении в белом свете.

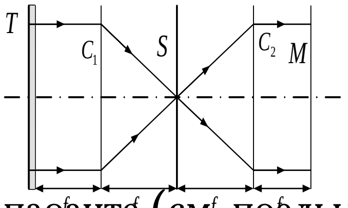
3.126. Найти функцию пропускания голограммы при голографировании объекта, колеблющегося с амплитудой a и частотой ω, такой, что время экспозиции голограммы $T \gg 2\pi/\omega$. Колебания происходят вдоль оси, перпендикулярной плоскости голограммы.

3.127. Предмет P (функция пропускания $G_0(x, y)$) находится в



передней фокальной плоскости линзы C, расположенной в одной плоскости с призмой D (преломляющий угол α). Предмет и призма освещены плоским когерентным пучком света. Найти функцию пропускания голограммы, расположенной в задней фокальной плоскости линзы (получение фильтра, согласованного с предметом). Указание: использовать результаты задач 3.107 и 3.111.

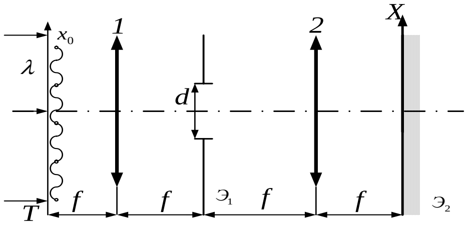
3.128. В передней фокальной плоскости линзы C_1 находится



транспарант T с функцией пропускания $F_0(x_0, y_0)$; в задней фокальной плоскости этой линзы размещен фильтр S, согласованный с фрагментом $G_0(x_0, y_0)$ изображения на транспаранте (см. предыдущую задачу). Транспарант освещен плоским когерентным пучком. Найти изображение в задней фокальной плоскости объектива C_2, расположенного так, что фильтр S находится в передней фокальной плоскости этого объектива.

3.129. Найти спектр пространственных частот при прохождении плоской волны длиной λ через фильтр с функцией пропускания $T(x) = T_0 + \tau\cos(\varkappa x)$, $(T_0 + \tau \lesssim 1)$.

3.130. Найти распределение интенсивности по экрану $Э_2$, если



пропускание транспаранта $T(x) = T_0 + \tau\cos(\varkappa x)$, а размер щели в экране $Э_1$ $d < \varkappa\lambda f/\pi$. Расстояния между экранами, одинаковыми линзами *1* и *2* и транспарантом равны фокусному расстоянию f линз.

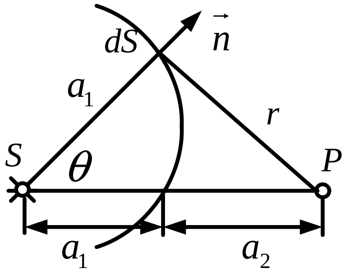
3.131. В установке, рассмотренной в предыдущей задаче, в качестве транспаранта использована полупрозрачная фотография, сделанная в снегопад. Каким должен быть размер щели d, чтобы «убрать» изображение падающего снега в плоскости экрана $Э_2$? Чем определяется разрешение «исправленной» фотографии?

3.132. Разрешение «исправленной» фотографии при «очистке от снега» (см. предыдущую задачу) можно улучшить, если в плоскости транспаранта T поместить еще один транспарант с функцией пропускания $T_1(x) = T_0' + \tau' cos(\varkappa_1 x_0)$, $(\tau' \ll T_0', \tau_1 + T' \approx 1)$. Как нужно выбрать $\varkappa_1$, чтобы добиться этого улучшения? Чем теперь определяется разрешение?

3.133. В установке, рассмотренной в задаче 3.130, вместо транспаранта помещена решетка из взаимно перпендикулярных нитей толщиной d и расстоянием a между осями нитей. Щель в экране $Э_1$ параллельна одному из двух направлений нитей. Как будет меняться изображение на экране $Э_2$ по мере уменьшения размера щели? (Опыт Аббе—Портера.)

3.6. Решение типичных задач

Р.32. Установить свойства зон Френеля для точечного источника S монохроматических сферических волн: найти площадь и радиус n-й зоны.

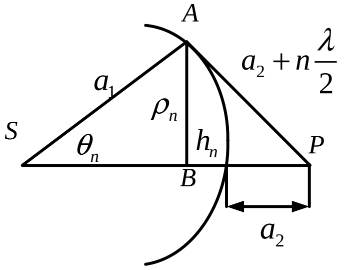


Расстояние между центром сферы и точкой $P - SP = a_1 + a_2$.

Тогда

$$E(P) = \frac{1}{iL}\int E_0 \frac{e^{ika_1}}{a_1}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cos\psi \mathrm{d}S.$$

Для вычисления интеграла разобьем сферическую поверхность на кольцевые зоны с центром в точке P и радиусом $r_n = a_2 n\frac{\lambda}{2}$, где $n = 1, 2, \dots$ — целые числа.



Найдем радиусы кольцевых границ этих зон и их площади $\triangle S_n = S_n - S_{n-1}$, где S_n — площадь сферического сегмента ($S_n = 2\pi a_1 h_n$).

Выразим ρ_n^2 из $\triangle SAB$ и $\triangle BAP$:

$$a_1^2 - (a_1 - h_n)^2 = \left(a_2 + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (a_2 + h_n)^2.$$

Раскрывая скобки, получаем

$$a_1^2 - a_1^2 - h_n^2 + 2a_1 h_n = a_2^2 + n\frac{\lambda^2}{4} + na_2\lambda - a_2^2 - h_n^2 - 2a_2 h_n.$$

Пренебрегая слагаемым $n^2\frac{\lambda^2}{4}$ ($a_{1,2} \gg \lambda$), получаем

$$h_n = \frac{a_2}{a_1 + a_2}\frac{n\lambda}{2} \text{ и } S_n = 2\pi h_n a_1 = \pi\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\lambda n = nS_1.$$

Площадь любой кольцевой зоны

$$\triangle S_n = S_n - S_{n-1} = \pi\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\lambda$$

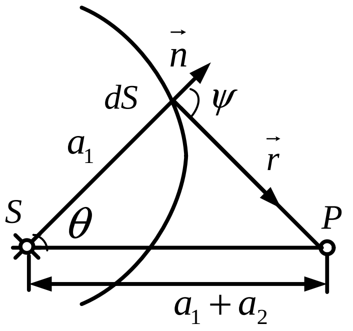
не зависит от n и мала (пропорциональна λ). Радиус зоны

$$\rho_n = \sqrt{a_1^2 - (a_1 - h_n)^2} = \sqrt{(2a_1 - h_n)hn} \cong \sqrt{2a_1 h_n} =$$

$$= \sqrt{\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2}\lambda n} = \sqrt{n}\rho_1.$$

При $a_1 \longrightarrow \infty$ $\rho_n \longrightarrow \sqrt{a_2\lambda n}$, при $a_1 = a_2 = a$ $\rho_n = \sqrt{2a\lambda n}$. Например, при $a_2 = a_1 = 1$ м, $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$см $= 5 \cdot 10^{-7}$м $\rho_1 = \sqrt{2 \cdot 10^2 \cdot 5 \cdot 10^{-5}} = 0,1$ см. Для $a_1 \longrightarrow \infty$ и $a_2 = 1$ м $\rho_1 = \sqrt{5 \cdot 10^{-5} \cdot 10^2} = \frac{0,1}{\sqrt{2}}$ см $\approx 0,07$ см $\approx 0,7$ мм. Зоны для видимого света очень узки.

Р.33. Используя интеграл Кирхгофа $E = \int\int \frac{E_0 e^{ikr}}{i\lambda r}\cos\psi \mathrm{d}S$, рассчитать вклад от n-й зоны Френеля для точечного источника монохроматического излучения с длиной волны λ, амплитуда волны — E_0.



Границы зоны $a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{2}$ и $a_2 + n\frac{\lambda}{2}$. Расстояние между источником и наблюдателем $SP = a_1 + a_2$. Вклад от n-й зоны:

$$E_n = \frac{E_0}{i\lambda}\int \frac{e^{ika_1}}{a_1}\cos\psi_n \frac{e^{ikr}}{r} 2\pi a_1^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta,$$

$$r^2 = a_1^2 + (a_1 + a_2) - 2a_1(a_1 + a_2)\cos\theta.$$

Найдем дифференциал этого соотношения: $2r\mathrm{d}r = 2a_1(a_1 + a_2)\sin\theta \mathrm{d}\theta$, отсюда

$$\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{r\mathrm{d}r}{a_1(a_1 + a_2)}.$$

Подставим в интеграл:

$$E_n = \frac{E_0}{i\lambda}\int_{a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{1}}^{a_2 + n\lambda/2} \frac{e^{ika_1}}{a_1}\cos\psi_n \frac{e^{ikr}}{r} 2\pi a_1^2 \cdot \frac{r\mathrm{d}r}{a_1(a_1 + a_2)} =$$

$$= E_0 \frac{e^{ika_1} 2\pi}{i\lambda(a_1 + a_2)} \int_{a_2 + (n-1)\frac{\lambda}{1}}^{a_2 + n\lambda/2} \cos\psi_n e^{ikr} \mathrm{d}r.$$

Заменим переменные: $r = r' + a_2$, тогда из-под интеграла уйдет множитель e^{ika_2} и упростятся пределы интегрирования.

Кроме того, учитывая узость зоны и слабую зависимость $\cos\psi_n$ от угла в пределах зоны, заменим $\cos\psi_n$ на его среднее значение $\overline{\cos\psi_n}$ и вынесем из-под интеграла эту константу:

$$E_n = \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)} \frac{\overline{\cos\psi_n} 2\pi}{i\lambda} \int_{(n-1)/\lambda/2}^{n\lambda/2} e^{ikr} \mathrm{d}r,$$

$$J_n = \int_{(n-1)\lambda/2}^{n\lambda/2} e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r} \mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi i}\left(e^{i\frac{2\pi}{\lambda}n\frac{\lambda}{2}} - e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(n-1)\frac{\lambda}{2}}\right),$$

$$J_n = \frac{\lambda}{2\pi}\left(e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)}\right) = \frac{\lambda 2(-1)^n}{2\pi i},$$

так как

$$e^{i\pi n} - e^{i\pi(n-1)} = 2(-1)^n.$$

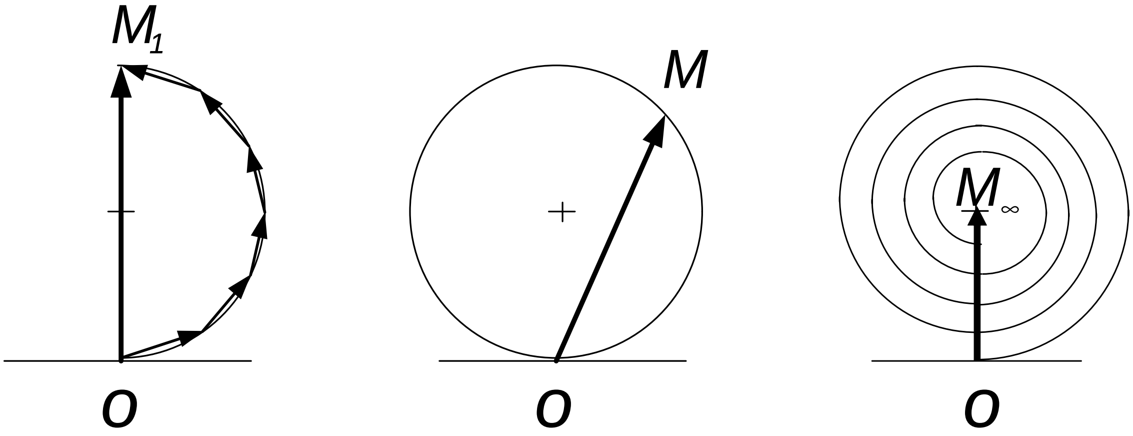
Таким образом,

$$E_n = \frac{2E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{(a_1+a_2)}(-1)^{n+1}\overline{\cos\psi_n}.$$

В частности, $E_1 = \frac{2E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1+a_2}$, т. е. в 2 раза больше амплитуды при полностью открытом фронте $E = \frac{E_0 e^{ik(a_1+a_2)}}{a_1+a_2}$. Кроме того, видно, что вклады зон образуют знакочередующийся ряд со слабо падающей, но падающей с ростом n зависимостью от n, обусловленной падением $\overline{\cos\psi_n}$.

Р.34. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием. Используя геометрическое представление вкладов зон Френеля, аналогичное спирали Корню, определить какова интенсивность I за экраном в точке, для которой отверстие равно: а) 1-й зоне Френеля; б) внутренней половине 1-й зоны; в) 1-й зоне, половина которой перекрыта по диаметру; г) полутора первым зонам; д) одной трети 1-й зоны?

Используя вычисления, проведенные в задаче Р.33, можно пред-



ставить амплитуду вклада от различных зон Френеля как комплексное число, изображаемое на комплексной плоскости в виде вектора с началом в начале координат O (см. рисунок выше).

На этой плоскости они будут представляться в виде векторов, модуль которых пропорционален амплитуде самих величин, а ориентация которых (угол по отношению к горизонтальной действительной оси) будет определяться значением их фазы (показатель мнимой экспоненты; он в точности характеризует набег фазы на соответствующей части зоны). Таким образом, если разбить зону на много малых равных частей, то вклад каждой из них будет представляться векторами одинаковой длины, каждый из которых, начинаясь в конце предшествующего вектора, будет повернут относительно него на дополнительный угол, пропорциональный набегу фазы на этой части зоны. Следовательно, при разбиении зоны на неограниченное число частей концы векторов, отвечающих за вклад каждой части, будут описывать дугу окружности. Поскольку набег фаз при прохождении одной зоны в точности равен π, то вклад каждой целой зоны будет изображаться половиной дуги окружности. Таким образом, вклад первой зоны изображает вектор $\overrightarrow{OM_1}$.

Аналогично, разбиение второй зоны на неограниченное число частей на рассматриваемой диаграмме описывается второй полуокружностью, начинающейся в M_1 и заканчивающейся в O. Поэтому вектор, описывающий действие второй зоны, также будет чисто мнимым,

но направленным в противоположную сторону по отношению к $\overrightarrow{OM_1}$ так что суммарное действие двух первых зон будет равно нулю. Суммарное действие n зон (если пренебречь слабой зависимостью от номера n вклада от каждой зоны), в зависимости от четности или нечетности n, будет либо нулевым, либо совпадать с действием только первой зоны. Действие же необязательно целого числа зон будет описываться вектором $\overrightarrow{OM}$, оканчивающимся на уже образованной первыми двумя зонами окружности с центром, лежащим на мнимой оси (см. рисунок).

Учтем теперь медленное уменьшение вклада очередной зоны по мере роста ее номера (оно определяется как постепенным уменьшением площади зоны, так и сопровождающимся падением коэффициента наклона). На диаграмме этот процесс проявится, естественно, в постепенном уменьшении радиуса полуокружности, «отвечающей» за эту зону; так как каждая из них начинается в конце предшествующей, то конец вектора $\overrightarrow{OM}$ будет описывать свертывающуюся спираль (см. рисунок)[4]. Ясно, что центр спирали M_∞ будет совпадать с центром уже построенной окружности, определяющей действие первых двух зон. В соответствии со смыслом диаграммы вектор $\overrightarrow{OM}_\infty$ будет описывать действие полностью открытого волнового фронта.

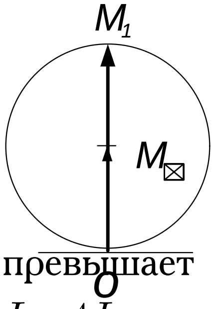
Отсюда очевидный и уже известный со времен Френеля результат: действие небольшого нечетного числа открытых зон в 2 раза по амплитуде U и в 4 раза по интенсивности $I \propto U^2$ превышает действие открытого фронта. Рассмотрим теперь часто встречающуюся ситуацию с прохождением волнового фронта через прозрачную среду с показателем преломления $n \neq 1$. Понятно, что построение зон Френеля в этом случае будет таким же, но следует учесть дополнительный про-

[4] Далее в решениях многих задач будет использоваться это представление, не получившее, к сожалению, как, например, спираль Корню, собственного имени. Необходимость частых ссылок, требует его наличия, и нам представляется справедливым использовать в этих случаях имя диаграмма или спираль Френеля, а для охватывающей ее окружности - окружность Френеля.

дольный набег фазы, равный $\Delta\varphi = knL$ и описываемый в выражении для волнового поля фазовым множителем $e^{i\Delta\varphi}$ (здесь L — путь, проходимый в среде; при введении графического представления зон этот множитель был несуществен и не принимался во внимание).

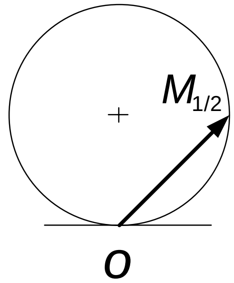
Геометрическое представление комплексных величин означает, что на диаграмме Френеля вектор $\overrightarrow{OM}$, описывающий действие какой-либо части фронта без учета продольного набега фазы, должен быть просто повернут на некоторый угол в направлении против часовой стрелки (соответствующем увеличению фазы). При равенстве набега фазы 2π вектор $\overrightarrow{OM}$ должен остаться неизменным (т.к. $e^{2\pi} = 1$), т.е. угол его поворота также равен 2π. Следовательно, при произвольной величине продольного набега фазы соответствующий угол β поворота вектора $\overrightarrow{OM}$ равен дробной (по модулю 2π) части этого набега фазы: $\beta = \Delta\varphi(\mod 2\pi)$.

а) Решение задачи в этом случае приведено выше. Поскольку точка



M_1 на окружности Френеля, соответствующая первой зоне, лежит на верхнем конце ее вертикального диаметра (см. рисунок), так что действие отверстия, описываемое длиной вектора $\overrightarrow{OM}_1$, вдвое превышает действие полностью открытого фронта. Следовательно, $I = 4I_0$.

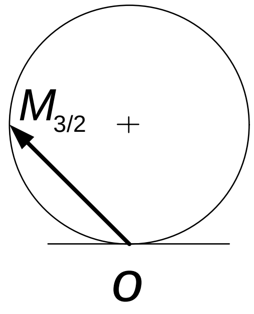
б) Точка $M_{1/2}$, описывающая действие половины 1-й зоны, находится, естественно, на окружности Френеля посередине между O и M_1 (см. рисунок), так что длина вектора $\overrightarrow{OM}_{1/2}$ в $\sqrt{2}$ превышает R_F,и поэтому $I = 2I_0$.



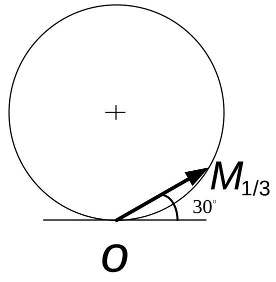
в) Из вычисления действия n-й зоны было видно, что в нем производится суммирование действия элементов зоны по азимутальному углу α (в пределах от 0 до 2π). Если же часть зоны по углу α перекрыта, то действие зоны уменьшается пропорционально. Таким образом, если первая зона перекрыта наполовину по диаметр, то ее действие

уменьшится вдвое и будет описываться вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}_1 = \overrightarrow{M_\infty M_1}$ т.е. станет равным действию полностью открытого фронта. Следовательно, $I = I_0$.

г) Ясно, что точка $M_{3/2}$ будучи на окружности Френеля, должна лежать посередине между точками M_1 и M_2, описывающих действие первой и второй зон, т. е. находится на левом конце горизонтального диаметра (см. рисунок). Следовательно длина вектора $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ в $\sqrt{2}$ превышает R_F и поэтому $I = 2I_0$.



д) Точка $M_{1/3}$ находится на окружности Френеля и вектор $\overrightarrow{OM}_{1/3}$ должен составлять с горизонтальной осью угол 30° (см. рисунок). Поэтому длина вектора $\overrightarrow{OM}_{1/3}$ будет совпадать с R_F, так что $I = I_0$.

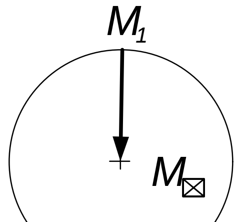


Р.35. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на непрозрачный диск, закрывающий для точки наблюдения 1-ю зону Френеля. а) Какова интенсивность I в точке наблюдения? Какой она стала после того как у диска удалили б) половину (по диаметру); в) половину (по диаметру) внешней половины 1-й зоны?

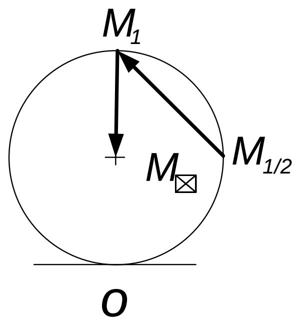
В силу принципа Бабине действие волнового поля в случае, когда его часть перекрыта экраном, описывается вектором, равным разности векторов $\overrightarrow{OM}_\infty$ (действие полностью открытого фронта) и $\overrightarrow{OM}$ (действие перекрывающего экрана). Применим этот принцип.

а) Ясно, что длина вектора $\overrightarrow{M_1 M}_\infty$ (см. рисунок) равна R_F, и поэтому $I = I_0$.

б) Удаление половины (по диаметру) перекрывающего диска означает открытие соответствующей



части фронта (в рассматриваемом случае — половины 1-й зоны). По принципу Бабине к вектору $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ из предыдущего случая следует добавить вектор, описывающий действие вновь открытой части фронта. Таковым является, как показано в задаче Р.34, вектор $\overrightarrow{M_\infty M_1}$. Следовательно, $I = 0$.



в) Как ясно из рассмотрения предыдущего случая, необходимо найти сначала действие половины (по диаметру) внешней половины 1-й зоны. На диаграмме Френеля действие половины 1-й зоны описывается вектором $\overrightarrow{OM_{1/2}}$ (см. рисунок); следовательно, вектор $\overrightarrow{M_{1/2} M_1}$ описывает действие внешней половины 1-й зоны.

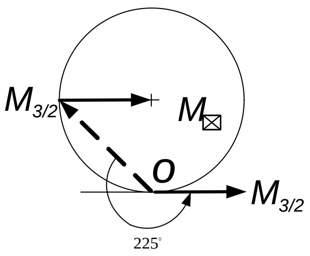
Таким образом, искомому действию соответствует сумма векторов $\overrightarrow{M_1 M_\infty}$ и $\frac{1}{2}\overrightarrow{M_{1/2} M_1}$ (множитель 1/2 появляется потому, что внешняя половина 1-й зоны открыта наполовину). Таким образом, $I \propto \left|\overrightarrow{M_1 M_\infty} + \frac{1}{2}\overrightarrow{M_{1/2} M_1}\right|^2$. Тривиальные вычисления (конечно, с учетом угла между складываемыми векторами) дают искомый результат: $I = I_0/2$.

Р.36. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I_0 падает нормально на прозрачный, стеклянный диск толщины h с показателем преломления n, размер которого соответствует полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения. При какой минимальной толщине диска интенсивность в этой точке будет максимальной? Какова эта интенсивность?

Ясно, что части волнового фронта, не занятой диском, на диаграмме Френеля соответствует вектор $\overrightarrow{M_{3/2} M_\infty}$, направленный вдоль горизонтальной оси от начальной точки $M_{3/2}$, лежащей на левом конце горизонтального диаметра окружности Френеля. В эту же точку

$M_{3/2}$ «смотрит» вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$, описывающий действие полутора зон в случае, если показатель преломления диска n равен 1.

Для $n > 1$ при прохождении через диск волнового фронта его фаза дополнительно возрастает на величину $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$, что означает доворот вектора $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ на угол $\beta = \Delta\varphi \mod 2\pi$ в направлении против часовой стрелки. Поскольку полная амплитуда в точке наблюдения определяется суммой волнового поля, прошедшего вне и через собственно диск, то максимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ станет сонаправленным вектору $\overrightarrow{M_{3/2}M}_{\infty}$.



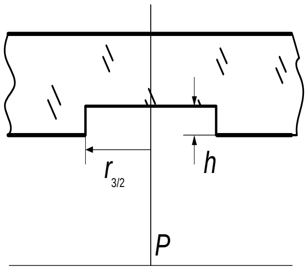
Таким образом, вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 225\,° = 5\pi/4$ (см. рисунок). Следовательно, $h_{min} = \frac{5}{8}\frac{\lambda}{n-1}$. Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов $\overrightarrow{M_{3/2}M}_{\infty}$ и $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ равны соответственно R_F и $\sqrt{2}R_F$, то $I_{max} = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 I_0 = (3+2\sqrt{2})I_0$.

Р.37. Как изменится интенсивность в точке экрана, на который падает монохроматическая плоско поляризованная волна интенсивности I_0, если на пути света поставить прозрачный диск, перекрывающий полторы зоны Френеля и поворачивающий плоскость поляризации света на $90°$?

Поскольку свет, прошедший мимо диска (1-я «компонента»), не изменит направления своей поляризации, а свет, прошедший через него (2-я «компонента»), приобретет поперечное направление поляризации, то в точке наблюдения нужно складывать интенсивности этих компонент. Для первой из них имеем, как всегда, значение I_0, т.к. ей на диаграмме Френеля соответствует вектор длины R_F. Поскольку

для 2-й компоненты открыто полторы зоны, то ей на диаграмме соответствует вектор длины $\sqrt{2}R_F$. Поэтому ее интенсивность будет составлять $2I_0$ а, следовательно, полная интенсивность равна $3I_0$.

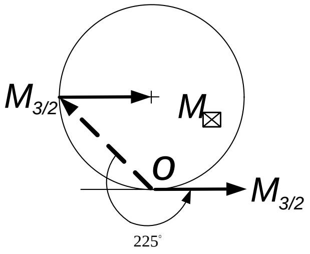
Р.38. Плоская монохроматическая волна с длиной волны λ и интенсивностью I_0 падает нормально на стеклянную пластинку с показателем преломления n. На противоположной стороне пластинки сделана выемка, соответствующая по размеру полутора зонам Френеля для некоторой точки наблюдения



P(см. рисунок). При какой глубине h выемки интенсивность света в точке наблюдения будет а) максимальной; б) минимальной; в) равной интенсивности падающего света? Каковы будут интенсивности в точке наблюдения в этих случаях?

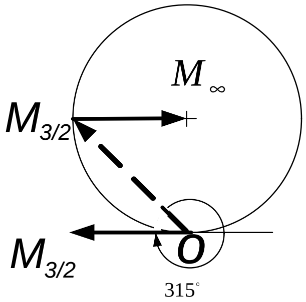
Волновому фронту, проходящему через не занятую выемкой часть пластинки, на диаграмме Френеля соответствует вектор $\overrightarrow{M_{3/2}M_\infty}$, направленный вниз под углом $45°$ от начальной точки $M_{3/2}$, лежащей на левом конце горизонтального диаметра окружности Френеля. В эту же точку $M_{3/2}$ «смотрел» бы вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$, описывающий действие полутора зон, если бы выемка в пластинке отсутствовала. Ее наличие означает для проходящего через нее света отставание по фазе по сравнению со светом, идущим через пластинку с показателем преломления $n > 1$. Величина возникшей разности фаз равна $\Delta\varphi = k(n-1)h = 2\pi(n-1)h/\lambda$, и ей соответствует поворот на диаграмме Френеля вектора $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ на угол $\beta = \Delta\varphi \mod 2\pi$ в направлении, соответствующем уменьшению фазы волны, т. е. по часовой стрелке. Полная амплитуда в точке наблюдения определяется, естественно, суммой волнового поля, прошедшего вне и через выемку. Теперь нетрудно рассмотреть интересующие нас случаи.

а) Максимум интенсивности будет иметь место тогда, когда вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ станет сонаправленным вектору $\overrightarrow{M_{3/2}M}_{\infty}$. Таким образом, вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 135°+360°m = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$ (см. рисунок). Следовательно, $h = \left(\frac{3}{8} + m\right)\frac{\lambda}{n-1}$.



Легко также найти и значение максимума, т. к. длины векторов $\overrightarrow{M_{3/2}M}_{\infty}$ и $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ равны соответственно R_F и $\sqrt{2}R_F$, то $I_{max} = (1+\sqrt{2})^2 I_0 = (3+2\sqrt{2})I_0$.

б) Минимум интенсивности будет иметь место в случае, когда вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ станет противоположно направленным вектору $\overrightarrow{M_{3/2}M}_{\infty}$, т.е. вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ должен быть повернут на угол $\beta = 315°+360°m = \frac{7\pi}{4} + 2\pi m$ (см. рисунок). Следовательно, аналогично предыдущему случаю получаем, что $h = \left(\frac{7}{8} + m\right)\frac{\lambda}{n-1}$ и $I_{min} = (1-\sqrt{2})^2 I_0 = (3-2\sqrt{2})I_0$.



в) Наконец интенсивность в точке наблюдения останется равной I_0, если вектор $\overrightarrow{OM}_{3/2}$ будет повернут на угол $\beta = 270°+360°m = \frac{3\pi}{2} + 2\pi m$. Следовательно, $h = \left(\frac{3}{8} + m\right)\frac{\lambda}{n-1}$.

Р.39. На щель шириной a перпендикулярно плоскости экрана падает плоская волна. Длина волны — λ. На щель нанесли прозрачное покрытие, которое изменяет амплитуду проходящей волны по закону $E = E_0\cos(\pi x/a)$, где координата x отсчитывается от середины щели. Найти интенсивность $I(\theta)$ волны, прошедшей под углом θ к первоначальному направлению.

$$E(\theta) = \frac{E_0}{a}\int_{-a/2}^{a/2}\cos\frac{\pi x}{a}e^{ik_x x}\mathrm{d}x = \frac{E_0}{2a}\int_{-a/2}^{a/2}\left(e^{i\frac{\pi x}{a}} + e^{-i\frac{\pi x}{a}}\right)e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\sin\theta x}\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{E_0}{a}\left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi}{a}+\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi}{a}-\frac{2\pi\sin\theta}{\lambda}}\right) = \frac{E_0\frac{4\pi a\sin\theta}{\lambda}\cos\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2-\pi^2},$$

$$I(\theta) = I_0\frac{\left(\frac{a}{\pi\lambda}\sin\theta\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}\right)}{\left[\left(\frac{a}{\lambda}\sin\theta\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2}.$$

Распределение $I_{(\theta)}$ имеет два максимума под углами $\theta_{1,2} = \pm\arcsin(\frac{\lambda}{2a})$.

Р.40. В дифракционной решетке $N \gg 1$ щелей. Пропускная способность каждой последующей щели по амплитуде в 2 раза меньше, чем у предыдущей, а фазы при прохождении соседних щелей различаются на $\alpha = \pi$. Ширина щелей a мала. Расстояние между щелями $d \gg a$. Свет с длиной волны λ падает на решетку по нормали. Интенсивность света, прошедшего через первую щель, равна I_0. Найти интенсивность прошедшего через решетку света в зависимости от угла дифракции θ.

Для обычной дифракционной решетки имеем

$$E_\theta = \frac{E_0}{a}\sum_{n=0}^{N-1}\int_{nd}^{nd+a} e^{ik_x x}\mathrm{d}x = \frac{E_0}{a}\int_0^a e^{ik_x x}\mathrm{d}x\cdot\sum_{n=0}^{N-1} e^{ik_x nd} =$$

$$= E_0 e^{ik_x a/2}\cdot\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{1-e^{ik_x Nd}}{1-e^{ik_x d}},$$

где

$$u = \frac{k_x a}{2} = \frac{\pi\sin\theta}{\lambda}.$$

Напомним, что

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = \frac{1-q^N}{1-q},$$

знаменатель геометрической прогрессии у нас $q = e^{ik_xd}$. Тогда

$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin v}{v}\right)^2,$$

$$v = \frac{k_xd}{2} = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}.$$

В нашем случае из-за узости щели $u \approx 0$ можно положить $\frac{\sin u}{u} \approx 1$, а знаменатель прогрессии

$$q = \frac{e^{i\pi}}{2} \cdot e^{ik_xd} = -\frac{1}{2}e^{ik_xd}.$$

Поскольку $N \gg 1$, то

$$\frac{1-q^n}{1-q} \approx \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1+e^{ik_xd}/2}.$$

Отсюда

$$I(\theta) = I_0 / \left(1 + \frac{1}{2}e^{ik_xd}\right)\left(1 + \frac{1}{2}e^{-ik_xd}\right),$$

$$I(\theta) = \frac{I_0}{\frac{5}{4} + \cos^2\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}}.$$

Р.41. Найти угловое распределение интенсивности света $I(\theta_1, \theta_2)$, дифрагирующего на прямоугольном отверстии размером $a_1 \times a_2$. Свет падает по нормали к плоскости отверстия. Длина волны λ.

$$E_{\theta_1,\theta_2} = \frac{E_0}{a_1a_2}\int_0^{a_1} \mathrm{d}x \int_0^{a_2} \mathrm{d}y e^{i(k_xx+k_yy)},$$

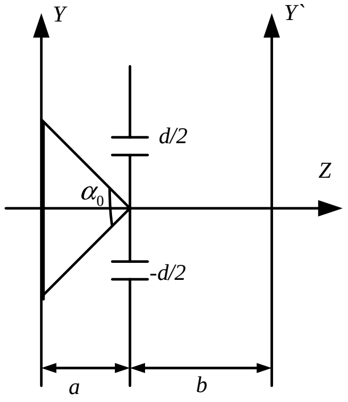
отсюда, опираясь на результат дифракции на одной щели, получаем

$$I(\theta_1, \theta_2) = I_0 \left(\frac{\sin u_1}{u_1}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin u_2}{u_2}\right)^2,$$

где

$$u_{1,2} = \frac{\pi a_{1,2} \cdot \sin\theta_{1,2}}{\lambda}.$$

Р.42. На экране наблюдается картина интерференции от двух параллельных щелей, расположенных на расстоянии d друг от друга в постановке опыта Юнга. Источник некогерентного света находится на большом расстоянии $a \gg d$ от щелей и представляет собой равномерно светящуюся полосу углового размера $\alpha_0 \ll 1$ (см. рисунок), параллельную щелям. Расстояние от экрана до щелей — $b \gg d$, длина волны — λ. Найти зависимость видности $V = (I_{max} - I_{min})/(I_{max} + I_{min})$ от d для интерференционных полос на экране.



Рассмотрим результат прихода в точку P экрана с координатой y' (расположенную под углом β к оси Z) двух лучей, вышедших из точки S полосы с координатой y (расположенную под углом α к оси Z). С учетом малости поперечных размеров по сравнению с продольными $y, y' \ll a, b$ имеем для путей r_1, r_1' и r_2, r_2' следующие соотношения:

$$r_1 \approx a - \alpha d/2; \;\; r_1' \approx a + \alpha d/2; \;\; r_2 \approx b - \beta d/2; \;\; r_2' \approx b + \beta d/2.$$

Тогда

$$E_p = E_0\left(e^{ik(r_1+r_1')} + e^{ik(r_2+r_2')}\right) = E_0 e^{ik(a+b)}\left(e^{ik(\alpha+\beta)/2} + e^{-ik(\alpha+\beta)/2}\right) =$$

$$= 2E_0 e^{ik(a+b)} \cos[kd(\alpha+\beta)/2].$$

Поскольку излучение полосы некогерентное, надо складывать интенсивности:

$$\mathrm{d}I_p = |E_p|^2 \mathrm{d}\alpha/\alpha_0 = 4E_0^2 \cos^2[kd(\alpha+\beta)/2]\mathrm{d}\alpha/\alpha_0 =$$

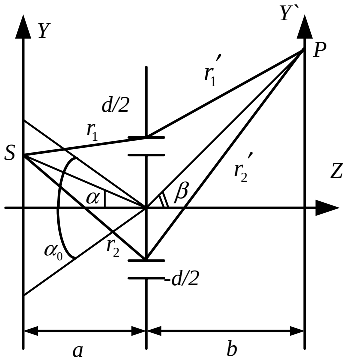
$$= 2I_0(1 + \cos[kd(\alpha + \beta)])\mathrm{d}\alpha/\alpha_0,$$

$$I_p = \int_{-\alpha_0/2}^{\alpha_0/2} \mathrm{d}I_p = 2I_0 \left(1 + \sin\left[kd\left(\frac{\alpha_0}{2} + \beta\right)\right] - \right.$$

$$\left. - \sin\left[kd\left(-\frac{\alpha_0}{2} + \beta\right)\right] / k\alpha_0 d\right) =$$

$$= 2I_0 \left(1 + \frac{\sin u}{u} \cos kd\beta\right),$$

где $u = kd\alpha_0/2 = \pi d\alpha_0/\lambda$.



Максимальное значение $\cos kd\beta = +1$, а минимальное значение $\cos kd\beta = -1$. Отсюда

$$I_{Pmax} = 2I_0(1 + \sin u/u),$$

$$I_{Pmin} = 2I_0(1 - \sin u/u).$$

Таким образом,

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = \left|\frac{\sin u}{u}\right| = \left|\frac{\sin \pi d\alpha_0/\lambda}{\pi d\alpha_0/\lambda}\right|.$$

В частности, $V = 0$ при $u = \pi$, т. е. при $\alpha_0 = \lambda/d$. Отсюда виден способ измерения малых угловых величин.

4. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$
$$\Box\vec{A}(\vec{r}, t) = -4\pi\mu\vec{j}/c, \quad \Box\varphi(\vec{r}, t) = -4\pi\rho(\vec{r}, t)/\varepsilon. \tag{1}$$

Калибровочное условие

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Решение уравнений в квадратурах

$$\begin{aligned} \vec{A}(x,y,z,t) &= \frac{\mu}{c}\int \frac{\vec{j}(x',y',z',t-\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}R)}{R}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z', \\ \varphi(x,y,z,t) &= \frac{1}{\varepsilon}\int \frac{\rho(x',y',z',t-\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}R)}{R}\mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z', \end{aligned} \tag{2}$$

где $R = \left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]^{1/2}$.

Поляризационный потенциал (вектор Герца)

$$\begin{gathered} \vec{Z}_e(x,y,z,t) = \int \frac{\vec{P}(x',y',z',t-R/c)\mathrm{d}V'}{R} \approx \\ \approx \frac{1}{r}\int \vec{P}(x',y',z',t-r/c)\mathrm{d}V' = \frac{\vec{p}(t-\frac{r}{c})}{r}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $\vec{p}$ — дипольный момент, а $\vec{P}$ — вектор поляризации. Тогда поле излучения

$$\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{Z}_e), \quad \vec{E} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{Z}_e). \tag{4}$$

Для магнитного дипольного момента $\vec{m}(\vec{r},t)$ имеем

$$\vec{Z}_m = \frac{\vec{m}(t-\frac{r}{c})}{r}. \tag{5}$$

Тогда поле излучения

$$\vec{H} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{Z}_m), \quad \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{Z}_e). \tag{6}$$

Для точечного диполя, помещенного в начало сферической системы координат имеем

$$\vec{p} = (p\cos\theta, -p\sin\theta, 0), \quad \vec{Z}_e = (Z\cos\theta, -Z\sin\theta, 0), \tag{7}$$

где $Z = \frac{p_0 e^{i\omega(t-r/c)}}{r}$;

$$\operatorname{rot}\vec{Z}_e = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r\sin\theta\vec{e}_\alpha \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\alpha} \\ Z_r & rZ_\theta & r\sin\theta Z_\alpha \end{vmatrix} \tag{8}$$

Тогда $H_r \equiv H_\theta \equiv 0$, а $H_\alpha = Z \sin\theta \left(\frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)$.

Для вектора $\vec{E} = \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{Z}_e)$ получаем

$$\begin{aligned} E_r &= 2Z\cos\theta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr}\right), \\ E_\theta &= Z\sin\theta\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2}\right), \\ E_\alpha &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Видно, что $(\vec{E}\vec{H}) = 0$, т. е. поля всюду ортогональны.

Поле в ближней (квазистационарной) зоне $l \ll r \ll \lambda$, $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$, поэтому здесь $\frac{1}{r} \gg \frac{\omega}{2\pi c}$.

$$\begin{gathered} E_r = 2p(t)\cos\theta/r^3, E_\theta = p(t)\sin\theta/r^3, E_\alpha = 0, \\ H_r = 0, H_\theta = 0, H_\alpha = \frac{i\omega}{c}\frac{p(t)\sin\theta}{r^2} = \frac{\dot{p}(t) r\sin\theta}{cr^3} = \frac{J}{c}\frac{\left|\left[\vec{r}\times\vec{dl}\right]\right|}{r^3}. \end{gathered} \tag{10}$$

Поле в дальней (волновой) зоне $l \ll \lambda \ll r$, $\frac{1}{r} \ll \frac{\omega}{2\pi c}$.

$$\begin{gathered} E_\theta = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{p(t-r/c)\sin\theta}{r}, \quad E_r = 0, \quad E_\alpha = 0, \\ H_\theta = 0, \quad H_r = 0, \quad H_\alpha = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{p(t-r/c)\sin\theta}{r} = E_\theta. \end{gathered} \tag{11}$$

В волновой зоне $\vec{E}\perp\vec{H}\perp\vec{r}$, $|\vec{E}| = |\vec{H}|$. Модуль вектора Пойнтинга

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi}\frac{\left|\ddot{\vec{p}}(t-r/c)\right|^2\sin^2\theta}{c^4 r^2}.$$

$$dI = Sr^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi}E_\theta^2 2\pi r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2c^3}\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2 \sin^3\theta \mathrm{d}\theta; \tag{12}$$

$$I = \int_0^\pi \mathrm{d}I(\theta) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{e^2\vec{a}^2}{c^3}. \tag{13}$$

Вклад в интенсивность I магнитодипольного $\vec{m}(t)$ и квадруполного момента $Q_{\alpha\beta}(t)$ имеет вид

$$I = \frac{2}{3}\frac{(\ddot{m})^2}{c^3} + \frac{1}{180c^5}\left(\dddot{Q}_{\alpha\beta}\right)^2. \qquad (14)$$

Рассеяние волн определяется сечением рассеяния — отношением рассеянной мощности к падающему потоку S_0:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}I}{S_0}, \quad \sigma = \frac{I}{S_0} = \frac{1}{S_0}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}. \qquad (15)$$

Сечение измеряется в барнах; 1 барн $=10^{-24}$ см^2.

Сечение рассеяния на свободной заряженной частице

$$\sigma_0 = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{m_0c^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}r_e^2, \qquad (16)$$

где $r_e = \frac{e^2}{m_0c^2}$.

Сечение рассеяния на упругой связанной частице

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \sigma_0\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)^2. \qquad (17)$$

1. При $\omega \gg \omega_0, \quad \sigma = \sigma_0$.
2. При $\omega \ll \omega_0, \quad \sigma = \sigma_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 = \sigma_0\left(\frac{\lambda 0}{\lambda}\right)^4 \backsim \frac{1}{\lambda^4}$.

Энергия, излучаемая во всех направлениях при рассеянии потока частиц, характеризуется полным эффективным излучением

$$\varkappa = 2\pi\int\limits_0^\infty \Delta W(\rho)\rho\mathrm{d}\rho, \qquad (18)$$

где $\Delta W(\rho)$ — энергия, излучаемая при одиночном столкновении двух частиц, ρ — прицельное расстояние.

Распределение излучения по направлениям в этом случае характеризуется дифференциальным эффективным излучением $\mathrm{d}\varkappa_{\vec{n}}$

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_{\vec{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}[\Delta W_{\vec{n}}(\rho)]}{\mathrm{d}\Omega}\,\rho\,\mathrm{d}\rho, \tag{19}$$

где $\frac{\mathrm{d}[\Delta W_{\vec{n}}(\rho)]}{\mathrm{d}\Omega}$ — энергия, излучаемая в направлении $\vec{n}$ в единицу телесного угла при одиночном столкновении с прицельным расстоянием ρ, усредненная по азимуту в плоскости, перпендикулярной потоку частиц. При дипольном излучении эта формула упрощается и приобретает вид

$$\frac{\mathrm{d}\varkappa_{\vec{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\left[A + BP_2(\cos\theta))\right], \tag{20}$$

где $P_2(\cos\theta)$ — полином Лежандра, θ — полярный угол между направлением $\vec{n}$ излучения и направлением z потока падающих частиц,

$$A = \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty 2\pi\rho\mathrm{d}\rho \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ddot{\vec{p}}^{\,2}\,\mathrm{d}t,$$

$$B = \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty 2\pi\rho\mathrm{d}\rho \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\ddot{\vec{p}}^2 - 3\ddot{p}_z^{\,2}\right)\,\mathrm{d}t.$$

4.1. Распределение дипольного излучения.Ближняя и волновая зоны. Спектр

4.1. Получить из уравнений Максвелла систему уравнений для потенциалов при наличии токов $\vec{j}$ и зарядов, распределенных с плотностью $\rho : \Box\vec{A} = -\frac{4\pi\vec{j}}{c}, \Box\varphi = -4\pi\rho, \operatorname{div}\vec{A} + (\frac{1}{c})\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$.

4.2. Исходя из условий для вектора поляризации в электростатике $\vec{j}_{\text{связ}} = \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}$ и введя вектор Герца $\vec{Z}_e$, связанный с поляризацией уравнением $\Box\vec{Z}_e = -4\pi\vec{P}$, решение которого есть

$$\vec{Z}_e = \int \frac{\vec{P}(x', y', z', t - \frac{r'}{c})dx', dy', dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r}\int \vec{P}(\vec{r}', t - \frac{r'}{c})dV' = \frac{\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

при $l \ll \lambda$, $l \ll r$, показать, что $\vec{E}_e = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z}_e$; $\vec{H}_e = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{Z}_e)$, $(\mu = \varepsilon = 1)$.

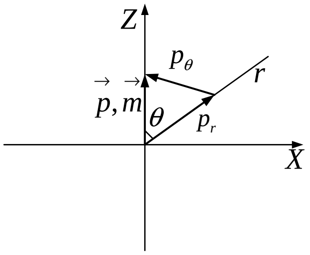
4.3. Исходя из условий для вектора намагничения в магнитостатике $\vec{j}_{\text{мол}} = c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$, полагая $\rho = 0$ и, следовательно, $\varphi = 0$ и введя вектор Герца $\vec{Z}_m$, связанный с намагничением уравнением $\Box\vec{Z}_m = -4\pi\vec{M}$, решение которого есть

$$\vec{Z}_m = \int \frac{\vec{M}(x', y', z', t - \frac{r'}{c})dx', dy', dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \approx$$

$$\approx \frac{1}{r}\int \vec{M}(\vec{r}', t - \frac{r'}{c})dV' = \frac{\vec{m}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

при $l \ll \lambda, l \ll r$, показать, что $\vec{E}_m = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{Z}_m)$;$\vec{H}_m = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{Z}_m$. Сравнить с результатами предыдущей задачи и записать решение для излучения от магнитного диполя по известному решению для электрического диполя.

4.4. Найти поля излучения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для точечного диполя с дипольным моментом:



а) $\vec{p} = \vec{p}_o e^{i\omega t}$;

б) $\vec{m} = \vec{m}_o e^{i\omega t}$.

Указание: использовать результаты двух предыдущих задач.

4.5. Из решения предыдущей задачи найти поле в ближней (квазистационарной) зоне $r \ll \lambda$. Показать, что для магнитного поля получается формула закона Био—Савара, а для электрического — поле диполя.

4.6. Из решения задачи 4.4 найти поле в дальней (волновой) зоне ($\lambda \ll r$).

4.7. Найти: а) угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\theta}$ от диполя; б) полное излучение $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ от дипольного излучателя.

4.8. Заряд движется с малой скоростью $\vec{v}$ и ускорением $\dot{\vec{v}}$ в ограниченной области размера a. Найти электромагнитное поле частицы в точках, расстояние до которых $r \gg a$. Определить границы квазистационарной и волновой зон.

4.9. Найти угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полное излучение заряда, рассмотренного в предыдущей задаче.

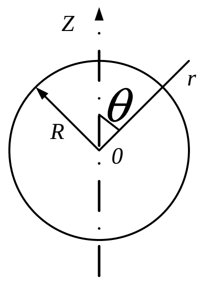
4.10. Сравнить средние (по времени и по сфере радиуса r) полные потоки энергии от элементарного вибратора, выходящие из ближней зоны и приходящие в волновую.

4.11. Показать, что длина основных электромагнитных колебаний металлического шарового вибратора радиуса R равна $\lambda = 4\pi R/\sqrt{3}$.

4.12. Заряженный шар радиуса $r = 0,5$ см соединяется прямым проводником с незаряженным шаром радиуса $R = 2$ см. Оценить время затухания электрических колебаний в системе. Длина проводника $\ell = 1$ м; диаметр $d = 0,1$ см. Сопротивлением в системе пренебречь.

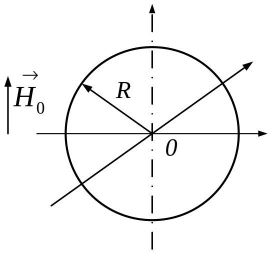
4.13. Показать, что радиально осциллирующая сфера, несущая сферически симметричный заряд, не излучает.

4.14. На поверхности сверхпроводящей сферы радиуса R создано



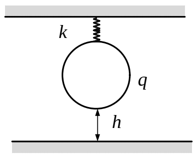
распределение заряда с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, а поле вне сферы соответствует этому статическому распределению зарядов. При $t = 0$ зарядам предоставляется свобода передвижения. Найти: а) зависимость электрического дипольного момента сферы от времени; б) электромагнитное поле вне сферы. Указание: искать решение в виде поля электрического диполя, момент которого $\vec{p}$ зависит от времени.

4.15. В однородном магнитном поле $\vec{H}_0$ находится сверхпроводя-



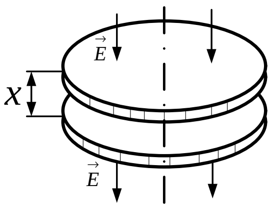
щая сфера радиусом R_0. Начиная с момента $t=0$ радиус сферы уменьшается по закону $R=R_0 e^{-v_0 t/R_0}$, где v_0 — начальная скорость поверхности сферы. а) Определить полную излученную энергию ($H_0 = 1$ эрстед, $v_0 = 100$ км/с, $R_0 = 10$ см). б) Какова максимальная напряженность электрического поля на расстоянии 10 см ?

4.16. На высоте h над проводящим полупространством на



пружинке с жесткостью k подвешено тело с зарядом q. Найти интенсивность излучения как функцию высоты h при малых колебаниях заряженного малого тела массой m.

4.17. Расстояние между двумя соприкасающимися концентри-



ческими тонкими металлическими дисками радиуса R, помещенными в однородное электрическое поле $\vec{E}$, изменяется по закону $x = a(1 - \cos\omega t)$, $\vec{E}$ параллельно оси дисков. Найти среднюю интенсивность дипольного излучения системы. Считать, что $a \ll R$.

4.18. Найти электромагнитное поле, угловое распределение и полную интенсивность, а также исследовать поляризацию при равномерном движении по окружности радиуса a с частотой ω нерелятивистской частицы заряда e $(v \ll c)$.

4.19. За какое время частица, движущаяся по круговой орбите, упадет на заряженный центр из-за потерь на электромагнитное излучение. Получить численную оценку для «атома водорода» в модели Резерфорда. $a=0,5\cdot 10^{-8}$см, $e=4,8\cdot 10^{-10}\,CGSE$, $m=0,9\cdot 10^{-27}$ г.

4.20. а) В классической (планетарной) модели атома оценить длину волны λ излучения атома водорода и ширину $\Delta\lambda$ спектра этого излучения. Диаметр атома $2a = 10^{-8}$см. б) Найти численные параметры дифракционной решетки, необходимые для измерения ширины

спектра этого излучения.

4.21. По орбите радиуса a движется пучок нерелятивистских частиц. Заряд пучка — Q, ток — J. Пучок имеет форму кольца с вырезанным углом $\alpha \ll 2\pi$. Найти излучаемую мощность в дипольном приближении. Что покажет прибор, регистрирующий постоянную составляющую напряженности электрического поля, в волновой зоне на оси пучка?

4.22. Описать излучение заряда, упруго связанного (частота — ω_0) и помещенного в однородное магнитное поле $\vec{H} = (0, 0, H)$. (Классическая модель эффекта Зеемана.)

4.23. Определить излучение диполя (с дипольным моментом $\vec{p}$), вращающегося в плоскости с постоянной угловой скоростью Ω.

4.24. Равномерно намагниченный шар радиусом a с намагниченностью $\vec{M}$ вращается с постоянной частотой ω вокруг оси, проходящей через центр шара и составляющей угол φ с направлением вектора $\vec{M}$. Найти электромагнитное поле $\vec{E}$, $\vec{H}$ и исследовать характер поляризации. Определить угловое распределение $\frac{dI}{d\Omega}$ и полную интенсивность $\overline{I}$ излучения.

4.25. Электрон $(-e, m)$ пролетает по диаметру шара радиусом R, внутри которого равномерно распределен заряд $+Q$. Перед влётом в шар электрон имел кинетическую энергию $\mathcal{E}_0$. Найти энергию $\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_0$, излученную электроном за время пролета через шар. Скорость электрона невелика.

4.26. Найти излученную энергию при свободном «схлопывании» под действием собственного поля пластин плоского конденсатора. Каждая пластина имеет массу M, площадь S, величину заряда Q. Начальный зазор между пластинами d_0, конечный — d.

4.27. Показать, что при столкновении двух заряженных частиц с одинаковым отношением e_i/m_i электрическое дипольное излучение

отсутствует.

4.28. Две нерелятивистские частицы с зарядами q_1, q_2 и массами m_1, m_2, $(\frac{q_1}{m_1} \neq \frac{q_2}{m_2})$ совершают эллиптическое движение в электрическом поле друг друга. Найти усредненную за период движения интенсивность излучения.

4.29. Определить энергию излучения при лобовом столкновении двух заряженных частиц $(\frac{q_1}{m_1} \neq \frac{q_2}{m_2})$.

4.30. Найти связь между скоростью потерь энергии на излучение в единицу телесного угла в данном направлении $\frac{d\mathcal{E}}{dt'd\Omega}$ и угловым распределением излучения $\frac{dI}{d\Omega}$.

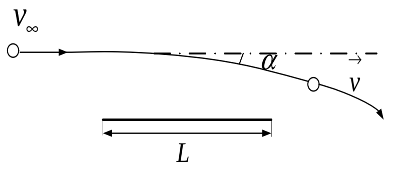
4.31. Оценить энергию излучения электрона, пролетающего на большом расстоянии от тяжелого ядра с зарядом Ze $(v \ll c)$.

4.32. Определить угловое распределение излучения заряда при пролете его мимо другого заряда с прицельным расстоянием ρ без рассеяния; скорость $\vec{v}$ направлена вдоль оси X и лежит в плоскости XY. Считать, что $v \ll c$.

4.33. Найти спектр тормозного излучения $\frac{d(\Delta W_\omega)}{d\omega}$ нерелятивистской частицы (заряд — q_1, масса — m) при рассеянии на малые углы на тяжелой частице (заряд — q_2).

4.34. Оценить излучение нерелятивистского электрона, быстро пролетающего мимо заземленного проводящего шара радиуса R.

4.35. Нерелятивистский электрон с кинетической энергией $\mathcal{E}$ отклоняется электрическим полем плоского конденсатора на малый угол α. Найти полную излученную энергию, если длина пластин конденсатора равна L.



4.36. Электрон с начальной кинетической энергией T пролетает сквозь конденсатор перпендикулярно его пластинам. Пластины круглые радиусом a, расстояние между ними $d \ll a$, разность потенци-

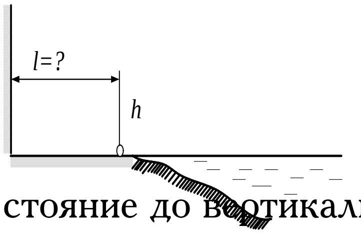
алов U. Найти потери на излучение в конденсаторе. Оценить потери на излучение во внешней области ($a = 10$ см, $d = 1$ см, $U = 10$ кВ, $T = 50$ кэВ).

4.2. Оценки мультипольного излучения. Антенны

4.37. Найти сопротивление излучения симметричного полуволнового вибратора.

4.38. а) Построить полярную диаграмму направленности для излучения диполя в плоскости, проходящей через ось диполя, и в плоскости, перпендикулярной оси. б) Нарисовать качественно вид полярной диаграммы направленности для антенны, состоящей из двух полуволновых вибраторов, параллельных друг другу, если расстояние между ними: 1) $a = \frac{\lambda}{2}$, токи совпадают по фазе; 2) $a = \frac{\lambda}{2}$, токи в противофазе; 3) $a = \lambda$, токи в противофазе; 4) $a = \frac{\lambda}{4}$, токи сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$.

4.39. Радист ведет передачу на обрывистом побережье. Штыревая антенна высотой $h \ll \lambda$ ориентирована вертикально. Считая грунт и воду океана обладающими высокой проводимостью, найти расстояние до вертикального обрыва l, при котором излучение вдоль поверхности океана максимально.



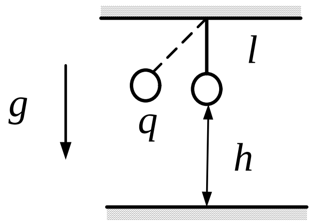
4.40. Найти поляризацию, угловое распределение и полную интенсивность излучения системы двух электрических диполей с частотой ω и одинаковой амплитудой $\vec{p}_0$, направленных под углом φ друг к другу и сдвинутых по фазе на $\pi/2$.

4.41. Найти поляризацию, угловое распределение и интенсивность излучения системы двух нерелятивистских одинаковых зарядов, вращающихся равномерно с частотой ω по круговой орбите радиуса a и остающихся при этом на противоположных концах диаметра.

4.42. Найти поле излучения, его угловое распределение и полную интенсивность в системе из двух одинаковых электрических диполей,

направленных по одной прямой и осциллирующих в противофазе с частотой ω. Расстояние между диполями $a \ll \lambda$.

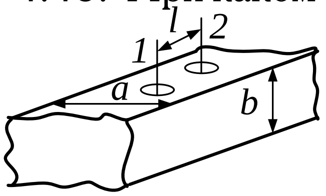
4.43. Математический маятник (длина — l, масса — m) с зарядом q висит на высоте h над бесконечной идеально проводящей плоскостью. Найти полную излучаемую мощность при малых колебаниях маятника с линейной амплитудой, если $h \ll \lambda$. Какова будет мощность излучения на частоте 2ω?



4.44. Рассмотренный в предыдущей задаче маятник сделали коническим, вращая с угловой скоростью ω вокруг вертикали. Найти угловое и полное распределение интенсивности излучения, усредненные по времени.

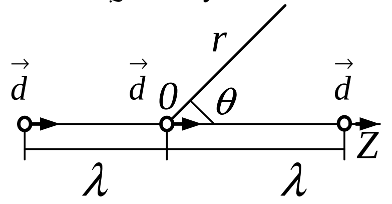
4.45. Найти угловое распределение излучения системы двух электрических диполей, осциллирующих с частотой ω; амплитуды колебаний диполей одинаковы, диполи ориентированы параллельно друг другу и перпендикулярно линии, соединяющей диполи (расстояние между ними $a = \lambda/4$). Колебания диполей сдвинуты по фазе на $\pi/2$.

4.46. При каком сдвиге фаз α и расстоянии l между двумя штыревыми антеннами *1* и *2*, вставленными в бесконечный прямоугольный волновод сечением $a \times b$, возбуждаемая на частоте ω H_{10}-волна будет распространяться лишь в одном направлении?



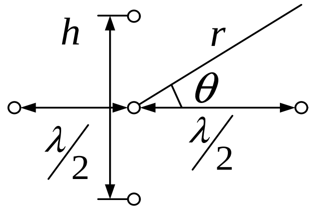
4.47. Определить качественно вид полярной диаграммы направленности для восьми параллельных полуволновых вибраторов, расположенных в одной плоскости на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга и питаемых синфазно.

4.48. Вдоль оси расположены и направлены вдоль нее три точеч-



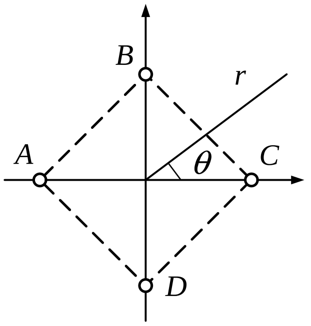
ных диполя с дипольными синфазными моментами $\vec{d} = \vec{d}_0 e^{-i\omega t}$. Один из них находится в начале координат, а два других на расстоянии длины волны λ выше и ниже первого. Найти усреднённое за период распределение интенсивности $\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\theta}$ по углу θ на большом расстоянии r от начала координат.

4.49. Антенна из четырех полуволновых вибраторов возбуждена



так, что токи в проводниках имеют одинаковые амплитуды и фазы. Найти распределение интенсивности от угла $I(\theta)$ в плоскости, ортогональной проводникам, если $h \ll \frac{\lambda}{2}$.

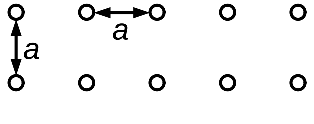
4.50. Антенна выполнена в виде четырех параллельных полувол-



новых вибраторов, штыри которых перпендикулярны рисунку и расположены по углам квадрата $ABCD$ с диагоналями $AC = BD = \frac{\lambda}{2}$. Токи в вибраторах B и D синфазны, в A ток отстает по фазе на $\pi/2$, а в C опережает на $\pi/2$ токи в B и D. Найти угловое распределение поля $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\theta}$ в волновой зоне в плоскости рисунка. Указать направление максимального излучения.

4.51. Как изменится диаграмма направленности решетки из равноотстоящих синфазных вибраторов, расположенных и ориентированных вдоль одной прямой, если убрать каждый третий из них?

4.52. Две решетки из N синфазных вибраторов каждая сдвинуты



относительно друг друга на расстояние a (см. рисунок). Найти зависимость от a диаграммы направленности.

4.53. Найти угловое распределение излучения системы из N одинаковых синфазных диполей с дипольным моментом $\vec{p}$, отстоящих друг от друга на расстоянии $a = \frac{\lambda}{2}$ в направлении, перпендикулярном

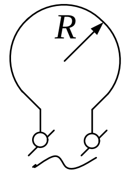
вектору $\vec{p}$.

4.54. Сложная излучающая система состоит из конечного ряда часто расставленных параллельных вибраторов с равномерным распределением фаз колебаний вдоль ряда. Как должен изменяться со временем сдвиг фаз между двумя соседними вибраторами, чтобы главный лепесток диаграммы направленности всей системы совершал круговой обзор местности с постоянной угловой скоростью (при отсутствии вращения самой системы) ?

4.55. Определить поле излучения на больших расстояниях от антенны, по которой идет ток $J = J_0 e^{i(kx-\omega t)}$, $|x| \le a$.

4.56. Найти угловое распределение и полное излучение линейной антенны длиной l, в которой возбуждена стоячая волна тока с узлами на концах антенны (амплитуда — J_0, число полуволн тока на длине антенны — m).

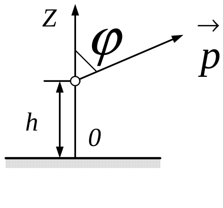
4.57. Круговая рамка «питается» током переменной частоты ω, так что в ней возбуждена стоячая волна тока $I = I_0 \sin n\alpha e^{-i\omega t}$. Найти угловое распределение излучения такой антенны.



4.58. Вычислить в омах сопротивление излучения рамочной антенны, имеющей форму круглого витка радиуса a и питаемого током $J = J_0 \cos \omega t$. Длина волны $\lambda \gg a$.

4.59. Найти диаграмму направленности излучения в вертикальной плоскости для горизонтального осциллирующего диполя, помещенного на высоте h над землей. Землю считать плоской и идеально проводящей.

4.60. Найти электромагнитное поле и угловое распределение излучения электрического диполя (амплитуда — $\vec{p_0}$, частота — ω), находящегося на расстоянии $a/2$ от идеально проводящей



плоскости ($a \ll \lambda$, вектор $\vec{p_0}$ параллелен плоскости).

4.61. Над проводящим полупространством находится дипольный осциллятор $\vec{p}$ (высота — h, угол — φ). Найти поле излучения.

4.62. На концах непроводящей гантели, вращающейся с постоянной частотой, находятся одинаковые заряды — q. Как изменится мощность излучения, если в центр гантели поместить неподвижный заряд $+2q$?

4.63. Равномерно заряженная по объему капля (заряд q) пульсирует так, что уравнение её поверхности имеет вид: $4\pi R^2(\theta) = 4\pi R_0^2[1 + a(3\cos^2\theta - 1)\cos(\omega t)]^2$, где $a \ll 1$. Найти угловое распределение и полную интенсивность излучения.

4.64. Найти излучение $I(t)$ системы трех зарядов q, расположенных в вершинах жесткого правильного треугольника, вращающегося вокруг оси, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости треугольника.

4.65. N симметрично расположенных зарядов вращаются по окружности. Описать излучение системы.

4.3. Рассеяние волн. Давление света

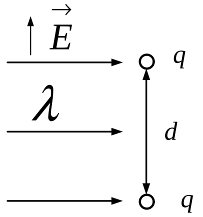
4.66. Определить эффективное сечение рассеяния свободным зарядом поляризованной волны с поляризацией: а) линейной; б) круговой; в) эллиптической.

4.67. Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $d\sigma/d\Omega$ и полное σ сечение рассеяния волны с учетом силы лучистого трения.

4.68. Электрон летит внутри пустого закрытого ящика, температура которого T. Определить тормозящую силу, действующую на электрон.

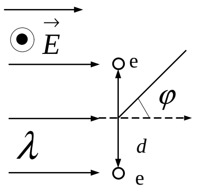
4.69. Найти дифференциальное сечение рассеяния плоской линейно поляризованной монохроматической волны на маленьком шаре ($\lambda \gg a$). В поле электромагнитной волны у шара возникают дипольный электрический $\vec{d} = \alpha\vec{E}$ и магнитный $\vec{m} = \beta\vec{H}$ моменты.

4.70. Плоская волна длиной λ падает на систему двух свободных зарядов так, как показано на рисунке. Найти дифференциальное сечение рассеяния в зависимости от расстояния d между зарядами. Для каких соотношений $\frac{d}{\lambda}$ при заданном $\Delta\lambda$ в падающей волне рассеяние некогерентно?

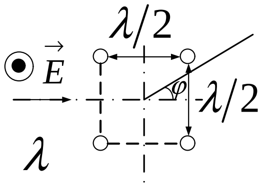


4.71. Плоская монохроматическая волна с круговой поляризацией и длиной волны λ рассеивается на двух электронах, находящихся на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга. Волна идет вдоль линии, соединяющей электроны. Найти поляризацию и отношение интенсивностей в продольном и поперечном направлениях.

4.72. Два нерелятивистских электрона (заряд — e, масса — m) находятся в поле линейно поляризованной плоской монохроматической волны. Расстояние между ними практически постоянно: $d = \frac{\lambda}{2}$. Электрическое поле волны направлено по нормали к плоскости рисунка. Найти сечение рассеяния $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\varphi$, где φ — угол рассеяния волны в плоскости рисунка,



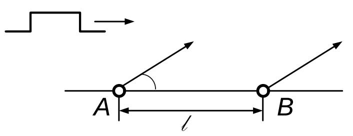
4.73. Четыре электрона в поле плоской монохроматической линейно поляризованной волны колеблются под действием ее электрического поля около точек, образующих квадрат со стороной $\frac{\lambda}{2}$ (λ — длина волны). Поле $\vec{E}$ перпендикулярно плоскости квадрата, волна распространяется в направлении, параллельном одной из сторон квадрата. Найти угловое распределение интенсивности рассеянного электронами излучения на расстоянии $r \gg \lambda$ в плоскости квадрата. В каком



направлении это излучение максимально? Чему равно сечение рассеяния $d\sigma/d\varphi$?

4.74. Найти дифференциальное сечение рассеяния плоскополяризованного света «молекулой», состоящей из двух осцилляторов, расположенных на расстоянии a. Определить интенсивность света, рассеянного N «молекулами», расположенными и ориентированными хаотически в случаях, когда: а) $\lambda \gg a$ и б) $\lambda \ll a$. Расстояние между «молекулами» существенно больше λ.

4.75. Волновой пакет длиной $c\tau$ с несущей частотой ω_0 налетает



на два свободных электрона, расстояние между которыми $AB = l \lesssim c\tau$. Пакет амплитуды $\vec{E}_0$ образован линейно поляризованными электромагнитными волнами, волновой вектор которых направлен вдоль AB, а электрическое поле перпендикулярно плоскости рассеяния волн. Найти спектр излучения, рассеянного под углом θ к первоначальному направлению.

4.76. Плоская линейно поляризованная электромагнитная волна (частота — ω, поток энергии — I) рассеивается диэлектрическим шариком радиуса a $(a \ll c/\omega)$. Материал шарика обладает нелинейной поляризуемостью: $\varepsilon = \varepsilon_0 + \alpha E^2$. Считая нелинейность слабой $(\alpha E^2 \ll \varepsilon_0)$, вычислить сечение рассеяния на тройной (3ω) частоте.

4.77. Оценить интенсивность второй гармоники излучения, возникающего при рассеянии линейно поляризованной монохроматической волны на свободном электроне.

4.78. Два противоположных заряда равной массы m вращаются вокруг общего центра, удерживаемые взаимным электрическим притяжением. Определить сечение рассеяния на такой системе плоскополяризованной волны, падающей перпендикулярно плоскости вращения, в двух предельных случаях: а) больших и б) малых частот.

4.79. Найти дифференциальное эффективное излучение $\frac{d\varkappa_{\vec{n}}}{d\Omega}$ при рассеянии потока частиц (заряд — q_1, масса — m_1, скорость — v_0) на одноименно заряженной частице (заряд — q_2, масса — m_2)

4.80. Навстречу электронам с энергией 100 ГэВ пускают линейно поляризованный свет с длиной волны $6\,328$ $\mathring{A}$. Найти угловое распределение рэлеевского рассеяния света на электронах и характерную длину волны λ.

4.81. Определить силу, действующую на стенку, от которой отражается (с коэффициентом отражения R) падающая на неё плоская электромагнитная волна.

4.82. На зеркальную непрозрачную стенку, которая движется со скоростью $v \sim c$, падает плоская электромагнитная волна интенсивностью I под углом α к нормали. Коэффициент отражения $R = 1$. Найти давление, действующее на стенку.

4.83. Пучок параллельных монохроматических лучей света падает на плоскопараллельную пластинку под углом $\alpha \approx 0$. Толщина пластинки — d, показатель преломления — n. Определить давление света на пластинку, если плотность потока энергии в падающем свете S.

4.84. На зеркальный непрозрачный шар радиуса $a = 1$ см с коэффициентом отражения $R = 0,1$ падает плоская световая волна с интенсивностью $I = 2$ Вт/см^2. В приближении геометрической оптики найти силу, действующую на шар, и сечение поглощения волны.

4.85. Найти зависимость величины и знака силы, действующей на тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием F_0, от расстояния x между линзой и точечным источником монохроматического света интенсивности I_0, расположенного на главной оптической оси. Отражением света от линзы пренебречь. Задачу решать в приближении геометрической оптики для тонких линз. Радиус линзы $a \ll x, F_0$.

4.86. Оценить, при каком размере пылинки сила давления солнечного света на нее в космосе превысит силу тяготения.

4.87. Оценить световое давление в эпицентре взрыва атомной бомбы (температура $T \sim 10$ кэВ).

4.4. Решение типичных задач

Р.43. Из уравнений Максвелла получить систему уравнений для потенциалов при наличии токов $\vec{j}$ и зарядов, распределенных с плотностью ρ: $\Box\vec{A} = -4\pi\mu\vec{j}/c$, $\Box\varphi = -4\pi\rho/\varepsilon$, $(\text{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\partial\varphi/\partial t) = 0$; $\mu\vec{H} = \text{rot}\vec{A}$, $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$, ε, μ — постоянны.

Запишем систему уравнений Максвелла:

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t};\ \ \text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t};$$

$$\text{div}\vec{D} = 4\pi\rho;\ \ \text{div}\vec{B} = 0;\ \ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \ \vec{D} = \varepsilon\vec{E}.$$

Подставив $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ в закон Фарадея, получим $\text{rot}\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$, т. е. поле $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ потенциально. Введем для него скалярный потенциал φ. Тогда $\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\text{grad}\varphi$, отсюда $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

Подставим это выражение $\vec{E}$ и $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\text{rot}\vec{A}$ в уравнение $\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Получаем

$$\frac{1}{\mu}\text{rot rot}\vec{A} = \frac{4\pi}{c}j - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right).$$

Так как $\text{rot rot}A = \text{grad div}\vec{A} - \triangle\vec{A}$, то

$$\text{grad div}\vec{A} - \triangle\vec{A} = 4\pi\frac{\mu}{c}\vec{j} - \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{grad}\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right).$$

Отсюда имеем

$$\triangle\vec{A}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-4\pi\frac{\mu}{c}\vec{j}+\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right).$$

Наложив калибровочное условие $\mathrm{div}\vec{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$, получаем

$$\Box\vec{A}=-4\pi\frac{\mu}{c}\vec{j},$$

где $\Box=\triangle-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ — оператор Даламбера. Подставив в уравнение $\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\frac{\rho}{\varepsilon}$ выражение $\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi$ и учитывая, что $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\varphi\equiv\triangle\varphi$, а также приняв во внимание калибровочное условие $\mathrm{div}\vec{A}=-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, получим уравнение

$$\Box\varphi\equiv\triangle\varphi-\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{4\pi\rho}{\varepsilon}.$$

Р.44. Показать, что поле излучения диполя $\vec{E}_e=\mathrm{rot}\;\mathrm{rot}\vec{Z}_e$, $\vec{H}_e=\frac{1}{c}(\mathrm{rot}\vec{Z}_e)$, $(\mu=\varepsilon=1)$, где $\vec{Z}_e=\vec{p}(t-r/c)/r$ — вектор Герца при $\ell\ll r$, используя систему уравнений Максвелла для потенциалов и с помощью замен $j=\partial\vec{\mathcal{P}}/\partial t$, $\rho=-\mathrm{div}\vec{\mathcal{P}}$, сведя систему к уравнению $\Box\vec{Z}_e=-4\pi\vec{\mathcal{P}}$, решение которого

$$\vec{Z}_e=\int\frac{\vec{\mathcal{P}}(\vec{r'},t-R/c)}{R}dV'\approx\frac{1}{r}\int\vec{\mathcal{P}}(\vec{r'},t-r/c)dV'=\frac{\overrightarrow{p(t-r/c)}}{r}$$

при $\ell\ll r$.

Запишем систему при $\varepsilon,\mu=1$:

$$\Box\vec{A}=-4\pi\vec{j}/c,\;\;\Box\varphi=-4\pi\rho,\;\;\mathrm{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\;\;\vec{H}=\mathrm{rot}\vec{A}.$$

Заменив $\vec{j}$ на $\frac{\partial\vec{\mathcal{P}}}{\partial t}$, потребуем, чтобы $\vec{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}_e}{\partial t}$, тогда первое уравнение перейдет в $\Box\vec{Z}_e = -4\pi\vec{\mathcal{P}}$. Во втором уравнение замена $\rho=-\operatorname{div}\vec{\mathcal{P}}$ приводит к требованию $\varphi=-\operatorname{div}\vec{Z}_e$.

Калибровочное условие $\operatorname{div}\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$ автоматически удовлетворяется.

Так как $\vec{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{Z}_e}{\partial t}$, то $\vec{H}=\operatorname{rot}\vec{A}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\vec{Z}_e$.

Поскольку $\varphi=-\operatorname{div}\vec{Z}_e$, то

$$\vec{E}=-\operatorname{grad}\varphi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{Z}_e-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}_e}{\partial t^2}=$$

$$=\triangle\vec{Z}_e-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{Z}_e}{\partial t^2}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}_e=-4\pi\vec{\mathcal{P}}+\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}_e.$$

В области наблюдения поля зарядов нет и $\vec{\mathcal{P}}=0$, поэтому

$$\vec{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}_e.$$

Р.45. Исходя из условия $\vec{j}=c\operatorname{rot}\vec{M}$ для вектора намагничивания в магнитостатике, полагая, что плотность заряда $\rho\equiv 0$ и, следовательно, $\varphi\equiv 0$, и введя вектор Герца $\vec{Z}_m$, связанный с намагничением $\vec{M}$ уравнением $\Box\vec{Z}_m=-4\pi\vec{M}$, решение которого есть

$$\vec{Z}_m=\int\frac{\vec{Z}_m(\vec{r'},t-R'/c)dV'}{R}\approx\frac{1}{r}\int\vec{M}(\vec{r'},t-r/c)dV'=\vec{m}(t-r/c)/r$$

при $e\ll\lambda$, $e\ll r$, показать, что $\vec{E}_m=-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}Z_m$ и $\vec{H}_m=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}_m$. Сравнить с результатами предыдущей задачи.

Запишем систему для потенциалов в этом случае:

$$\Box\vec{A}=-4\pi\vec{j}/c,\ \ \operatorname{div}\vec{A}=0,\ \ \vec{E}_m=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},\ \ \vec{H}_m=\operatorname{rot}\vec{A}.$$

Используем замену $\vec{j} = c \operatorname{rot} \vec{M}$, чтобы прийти к уравнению $\square \vec{Z}_m = -4\pi \vec{M}$:

$$\square \vec{A} = -4\pi \vec{j}/c = -4\pi \operatorname{rot} \vec{M}.$$

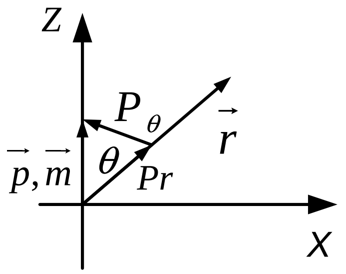
Очевидно, что $\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{Z}_m$. Тогда $\operatorname{div} \vec{A} = \operatorname{div} \vec{Z}_m = 0$:

$$E_m = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{Z}_m, \quad \vec{H}_m = \operatorname{rot} \vec{A} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{Z}_m.$$

$$\vec{Z}_m = \vec{m}(t - r/c)/r.$$

Поле излучения магнитного диполя $\vec{E}_m, \vec{H}_m$ отличается от полей излучения электрического диполя лишь заменой $\vec{E}_e \Leftrightarrow \vec{H}_m$, $\vec{E}_m \Leftrightarrow -\vec{H}_e, \vec{p}_e \Leftrightarrow \vec{m}_m$.

Р.46. Найти поля излучения $\vec{E}$ и $\vec{H}$ для точечного диполя с дипольным моментом: а) $\vec{p} = \vec{p_0} e^{-i\omega t}$; б) $\vec{m} = \vec{m_0} e^{-i\omega t}$. Указание: использовать результаты двух последних задач.



а) В сферической системе координат r, θ, α вектор $\vec{p}$ (его направление выбрано за направлении оси Z) выглядит так: $\vec{p} = (p_r, p_\theta, p_\alpha) = (p\cos\theta, -p\sin\theta, 0)$.

Задача аксиально симметрична относительно оси Z, угол θ отсчитывается от оси Z, а не от плоскости X, Y.

Тогда вектор Герца

$$\vec{Z}_e = \vec{p}(t - r/c)/r = \vec{p_0} e^{i\omega(\frac{r}{c} - t)}/r$$

имеет следующие проекции:

$$Z_e = (Z_{er}, Z_{e\theta}, Z_{e\alpha}) = (Z_e \cos\theta, -Z_e \sin\theta, 0).$$

Магнитное поле излучения $\vec{H}_e$:

$$\vec{H}_e = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{Z}_e.$$

Найдем $\operatorname{rot}\vec{Z}_e$:

$$\operatorname{rot}\vec{Z}_e = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e_r} & r\vec{e_\theta} & r\sin\theta\vec{e_\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ Z_e\cos\theta & -r\cdot Z_e\sin\theta & 0 \end{vmatrix}.$$

(Вместо $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ поставлен 0, так как из-за аксиальной симметрии нет зависимости от угла α).

$\operatorname{rot}_r\vec{Z}_e = 0$; $\operatorname{rot}_\theta\vec{Z}_e = 0$, следовательно, $H_r = H_\theta = 0$.

$$\operatorname{rot}_\alpha\vec{Z}_e = \frac{r\sin\theta}{r^2\sin\theta}\left(-\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot Z_e\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}(Z_e\cos\theta)\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(-Z_e\sin\theta - r\sin\theta\cdot\frac{\partial Z_e}{\partial r} + Z_e\sin\theta\right) = -\sin\theta\frac{\partial Z_e}{\partial r};$$

$$\frac{\partial Z_e}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p_0e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}\right) = \frac{p_0}{r}\frac{i\omega}{c}e^{-i\omega(t-r/c)} - \frac{p_0}{r^2}e^{-i\omega(t-r/c)} =$$

$$= \frac{p_0}{r}e^{-i\omega(t-r/c)}\left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{r}\right).$$

Магнитное поле

$$H_{e\alpha} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}_\alpha\vec{Z}_e = -\frac{i\omega}{cr}\left(\frac{i\omega}{c} - \frac{1}{c}\right)\sin\theta p_0e^{-i\omega(t-r/c)}.$$

$$H_{er} = H_{e\theta} = 0.$$

Рассчитаем электрическое поле:

$$E_e = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{Z}_e = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{e_z} & r\vec{e_\theta} & r\sin\theta\vec{e_\alpha} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & 0 \\ 0 & 0 & r\sin\theta\cdot\operatorname{rot}_\alpha\vec{Z}_e \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{rot}_\alpha Z_e = -\sin\theta \frac{\partial \vec{Z}_e}{\partial r}.$$

Отсюда следует, что $E_{e\alpha} = \operatorname{rot}_\alpha \operatorname{rot} \vec{Z}_e = 0$:

$$E_{er} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(-r \sin^2\theta \frac{\partial \vec{Z}_e}{\partial r} \right) = -\frac{2\sin\theta\cos\theta r}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial \vec{Z}_e}{\partial r} =$$

$$= 2\frac{\cos\theta}{r^2} \left(-\frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) p_0 e^{-i\omega(t-r/c)},$$

$$E_{e\theta} = \frac{r}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sin^2\theta \frac{\partial \vec{Z}_e}{\partial r} \right) = \sin\theta \frac{\partial}{\partial r} \left[p_0 e^{-i\omega(t-r/c)} \cdot \left(\frac{i\omega}{c} + \frac{1}{r} \right) \right] =$$

$$= \sin\theta \left(\frac{1}{r^2} - \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{p_0 e^{-i\omega(t-r/c)}}{r}.$$

Введем понятие ближней (квазистационарной) зоны: $\ell \ll r \ll \lambda$ $\lambda = cT = \frac{2\pi c}{\omega}$, т. е. $\frac{\omega}{c} << \frac{1}{r}$. Здесь

$$E_{er} \approx \frac{2p_0 e^{-i\omega t}\cos\theta}{r^3} \equiv \frac{2p(t)\cos\theta}{r^3},$$

$$E_{e\theta} \approx \frac{p_0 e^{-i\omega t}\sin\theta}{r^3} \equiv \frac{p(t)\sin\theta}{r^3}, \quad E_{e\alpha} = 0.$$

Таким образом, мгновенное значение поля $\vec{E}_e$ (при фиксированном значении t — момент времени) — это поле электрического диполя, заданное в сферической системе координат. Оно меняется синхронно с колебаниями диполя. Магнитное поле в этой зоне

$$H_{e\alpha} = -\frac{i\omega}{cr^2} p_0 e^{-i\omega t} \sin\theta = \frac{1}{cr^2} \cdot \frac{\partial p(t)}{\partial t} \sin\theta,$$

$$\mathrm{d}p = q\mathrm{d}\ell; \;\; \mathrm{d}\dot{p} = J\mathrm{d}\ell; \;\; \mathrm{d}H_\alpha = \frac{J\mathrm{d}\ell \, r\sin\theta}{cr^3} \text{ – закон Био–Савара.}$$

Посмотрим на наш результат на больших расстояниях. Введем понятие дальней (волновой) зоны: $\ell \ll \lambda \ll r$, т. е. $\frac{\omega}{c} \gg \frac{1}{r}$. Здесь $E_r = E_\alpha = 0$, $H_r = H_\theta = 0$,

$$E_\theta = H_\alpha = -\frac{\omega^2}{c^2 r} p_0 e^{-i\omega(t-r/c)} \sin\theta = \frac{1}{c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2} p(t - r/c).$$

Это сферическая электромагнитная волна со всеми ее свойствами: $|E| = |H|$; $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$.

Отсюда легко получить классическую формулу дипольного излучения

$$\mathrm{d}I = S\mathrm{d}s = \frac{c}{4\pi} E_\theta^2 \cdot 2\pi r^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{\ddot{\vec{p}}^2(t - r/c)}{2c^3} \sin^3\theta \mathrm{d}\theta.$$

Проинтегрировав по θ в пределах от 0 до π, учитывая, что $\int_0^\pi \sin^3\theta \mathrm{d}\theta = 4/3$, получим

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} = I = \frac{2}{3}\frac{\ddot{\vec{p}}^2(t - r/c)}{c^3}.$$

Так как $\vec{p} = q\vec{r}$, то $\ddot{\vec{p}} = q\ddot{\vec{r}} \equiv q\vec{a}$. Поэтому

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = I = \frac{2}{3}\frac{q^2\vec{a}^2}{c^3}.$$

б) Результат следует из заключения решения Р.40.

Р.47. Показать, что при взаимодействии N заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе q_i/m_i в отсутствие внешних полей электрическое дипольное излучение отсутствует.

$\vec{p} = \sum_{i=1}^N q_i\vec{r}_i$ — определение дипольного момента.

Домножим каждый член суммы на m_i/m_i и вынесем за знак суммы одинаковый для всех множитель q_i/m_i:

$$\vec{p} = (q_i/m_i)\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i.$$

Вспомним, что радиус-вектор системы центра масс

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i / \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

В отсутствие внешних сил $\ddot{\vec{R}} = 0$, тогда и $\ddot{\vec{p}} \equiv 0$, т. е. $I = 0$.

Р.48. За какое время частица, двигающаяся по круговой орбите, упадет на заряженный центр из-за потерь на электромагнитное излучение? Получить численную оценку для атома водорода в модели Резерфорда. (Радиус $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$см, заряд электрона $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ CGSE, масса $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г.)

Излучаемая (теряемая атомом) мощность

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\frac{2}{3}\frac{e^2\vec{a}^{\,2}}{c^3}.$$

По закону Ньютона $m|\vec{a}| = e^2/r^2$, т. е. $|\vec{a}| = e^2/mr^2$. Из $\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{r^2}$ получаем, сократив на r и поделив на 2, что кинетическая энергия на витке радиуса r равна $\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r}$.

Отсюда энергия

$$\mathcal{E} = \frac{mv^2}{2} - \frac{e^2}{r} = \frac{e^2}{2r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r}.$$

Поэтому $\mathrm{d}\mathcal{E} = e^2\mathrm{d}r/2r$.

Переходя в выражении для мощности от $\mathrm{d}\mathcal{E}$ к $\mathrm{d}r$, получаем, подставив выражение $\vec{a}$, дифференциальное уравнение

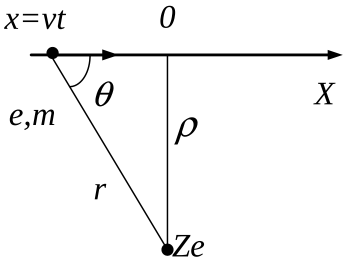
$$r^2\mathrm{d}r = -\frac{4e^4}{3m^2c^3}\mathrm{d}t,$$

где r изменяется от a до 0.

Отсюда время

$$t = \frac{a^3m^2c^3}{4e^4} = 1,3 \cdot 10^{-11}\ \text{с}.$$

Р.49. Оценить энергию, излученную электроном за все время его пролета на большом расстоянии ρ от тяжелого ядра с зарядом Ze. Считать его скорость v практически неизменной по величине и направлению, причем $v \ll c$.



$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2}{c^3} = \frac{2}{3}\frac{e^2Z^2e^4}{m^2c^3r^4}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{z^2e^6}{m^2c^3}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(\rho^2+v^2t^2)^2} = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3}J,$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{(\rho^2+v^2t^2)^2} = \frac{\rho}{\rho^4 v}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(vt/\rho)}{(1+(vt/\rho)^2)^2} = \frac{1}{\rho^3 v}\int_0^{\pi}\frac{\sin^4\theta d\theta}{\sin^2\theta}.$$

$$vt/\rho = \operatorname{ctg}\theta.$$

Тогда

$$1/(1+\operatorname{ctg}^2\theta)^2 = \sin^4\theta;\ \ d(\operatorname{ctg}\theta) = -d\theta/\sin^2\theta.$$

$$J = \frac{1}{\rho^3 v}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{\pi}{2\rho^3 v}.$$

Отсюда

$$\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3}\cdot\frac{\pi}{2\rho^3 v} = \frac{\pi}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3\rho^3 v}\ \text{ при }\ \frac{Ze^2}{\rho m v^2} << 1.$$

Р.50. Вычислить в омах сопротивление излучения рамочной антенны, имеющей форму кругового витка радиуса a и питаемого током $J = J_0\cos\omega t$. Длина волны $\lambda \gg a$.

Магнитный момент антенны

$$m(t) = JS/c = (\pi a^2 J_0\cos\omega t)/c = m_0\cos\omega t.$$

Излучаемая магнитным полем мощность

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{\omega^4}{c^3} m_0^2 \cos^2\left(t - \frac{r}{c}\right).$$

Средняя за период мощность

$$\overline{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3} = R_{\text{изл}} \cdot \overline{J^2}.$$

Найдем средний квадрат тока $\overline{J^2}$, выраженный через $\overline{m^2}$:

$$\overline{J^2} = \frac{c^2}{S^2}\overline{m^2} = \frac{m_0^2 \cdot c^2}{2(\pi a^2)^2} = \frac{J_0^2}{2}.$$

Наконец находим сопротивление излучения:

$$R_{\text{изл}} = \frac{\overline{d\mathcal{E}/dt}}{\bar{J}^2} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3},$$

$$\frac{J_0^2}{2} = \frac{m_0^2\omega^4}{3c^3} \cdot \frac{2\pi^2 a^4}{m_0^2 c^2} = \frac{2\pi^2}{3}\frac{\omega^4 a^4}{c^5}.$$

Так как $\frac{\omega}{c} = k = \frac{2\pi}{\lambda}$, то

$$R_{\text{изл}} = \frac{2\pi^2}{3c}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 = \frac{2}{9 \cdot 10^9}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \text{CGSE} = 200\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4 \text{Ом}.$$

5. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

Контравариантные координаты 4-вектор события $x^i = (x_0, x^1, x^2, x^3)$, $x^i = (ct, x, y, z)$. Декартова система A' движется вдоль оси x', совпадающей с осью x, со скоростью v. Тогда контравариантные координаты вектора события в этих системах связаны преобразованием Лоренца

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}, \beta = v/c$. Сокращенно это соотношение можно записать $x'^i = \Lambda^i_{.k} x^k$, где по повторяющимся индексам (один из которых вверху, другой расположен внизу) подразумевается суммирование. Иными словами, предыдущая запись означает, что

$$x'^i = \sum_{k=0}^{3} \Lambda^i_{.k} x^k. \tag{2}$$

Матрица обратного преобразования $\Lambda(\beta)^{-1} = \Lambda(-\beta)$.

Контравариантные компоненты некоторых 4-векторов:
потенциал $A^i = (\varphi, A^1, A^2, A^3) = (\varphi, \vec{A})$;
ток $j^i = (c\rho, j^1, j^2, j^3) = (c\rho, \vec{j})$;
волновой вектор $k^i = (\frac{\omega}{c}, k^1, k^2, k^3) = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$;
энергия-импульс $p^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, p^1, p^2, p^3)$.

Величина

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

называется метрическим тензором. Контравариантные и ковариантные компоненты метрического вектора связаны соотношением

$$g^{ik} = g_{ik} = g_{ik}^{-1}.$$

Метрический тензор используется для поднятия и опускания индекса

$$A_i = g_{ik} A^k; \;\; A^i = g^{ik} A_k.$$

Скалярное произведение 2-х произвольных 4-векторов a и b есть

$$ab = g_{ik} a^i b^k = a_k b^k = a^i b_i = g^{ik} a_i b_k. \tag{4}$$

Скалярное произведение инвариантно относительно преобразования Лоренца. Интервал

$$(ds)^2 = g_{ik} dx^i dx^k = dx_k \cdot dx^k. \tag{5}$$

$$\mathrm{d}s = c\mathrm{d}t\sqrt{1-\beta^2} = c\mathrm{d}t/\gamma = c\mathrm{d}\tau, \tag{6}$$

где τ — собственное время.

Эффект Доплера — преобразование частоты и угла:

$$\begin{aligned} k^i &= \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{c}\cos\theta, \frac{\omega}{c}\sin\theta, 0\right), \\ k'^i &= \left(\frac{\omega'}{c}, \frac{\omega'}{c}\cos\theta', \frac{\omega'}{c}\sin\theta', 0\right), \\ k'^i &= \Lambda^i_{.k} k^k. \end{aligned} \tag{7}$$

Преобразование частоты

$$\omega' = \gamma\omega(1-\beta\cos\theta) = \omega\frac{1-\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{8}$$

Аберрация

$$\mathrm{tg}\,\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(\cos\theta-\beta)}. \tag{9}$$

Продольный эффект Доплера:
$\theta' = 0$ или $\theta' = \pi \Rightarrow \sin\theta' = \sin\theta = 0.$

$$\omega' = \omega\gamma\,(1-\beta) = \omega\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \tag{10}$$

Поперечный эффект Доплера:
$\theta' = \pi/2$, тогда

$$\omega' = \gamma\left(1-\beta^2\right)\omega = \frac{\omega}{\gamma} = \omega\sqrt{1-\beta^2}. \tag{11}$$

4-вектор скорости[5]

$$u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\,(c, \vec{v}) = \gamma c(1, \vec{\beta}). \tag{12}$$

[5] В некоторых учебниках, в частности в «Теории поля» Ландау Л.Д. при определении 4-вектора скорости используется безразмерное определение $u^i = \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}s} = \gamma\left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) = \gamma(1, \vec{\beta})$.

4-вектор ускорения

$$a^i = \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = \gamma\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}t} = \gamma^2\frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} = \gamma^2(0, \vec{a}); \quad u_i a^i = 0. \tag{13}$$

Свободная релятивистская частица.

Импульс $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$, энергия $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma mc^2$, $\frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\vec{v}}{c^2}$, $\mathcal{E}^2 = p^2c^2 + m^2c^4$.

Заряженная релятивистская частица. Сила Лоренца

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} + \frac{q}{c}[\vec{v}\vec{H}], \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}. \tag{14}$$

Уравнение движения заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле в ковариантном виде

$$m\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}s} = \frac{q}{c}F^{ik}u_k. \tag{15}$$

Контравариантные компоненты тензора электромагнитного поля имеют вид

$$F^{ik} = \frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k}. \tag{16}$$

F^{ik} — антисимметричный тензор, $F^{ik} = -F^{ki}$:

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -H_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Преобразование Лоренца для F^{ik}:

$$F'^{ik} = \Lambda^i_{.m}\Lambda^k_{.n}F^{mn}. \tag{18}$$

Преобразование полей

$$\begin{aligned} H_x &= H_x', & E_x &= E_x', \\ H_y &= \gamma(H_y' - \beta E_z'), & E_y &= \gamma(E_y' + \beta H_z'), \\ H_z &= \gamma(H_z' + \beta E_y'), & E_z &= \gamma(E_z' - \beta H_y'). \end{aligned}$$

Инварианты поля:

1. $F_{ik}F^{ik} = -2E^2 + 2H^2 = \text{inv} \Rightarrow E^2 - H^2 = \text{inv}\,.$
2. $F_{ik}\tilde{F^{ik}} = 4\vec{E}\vec{H} = \text{inv} \Rightarrow \vec{E}\cdot\vec{H} = \text{inv}\,.$

Система уравнений Максвелла в вакууме в ковариантной форме :

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c}j^i. \tag{19}$$

$$\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0. \tag{20}$$

Излученный 4-импульс:

$$\Delta p^i = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^5}\int \left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)\mathrm{d}x^i, \tag{21}$$

в частности, излученная энергия

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left\{\vec{E}+\frac{1}{c}[\vec{v}\times\vec{H}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{E}\vec{v})^2}{1-v^2/c^2}\mathrm{d}t. \tag{22}$$

Торможение излучением нерелятивистской частицы

$$\vec{F} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\vec{v}},$$

для ультрарелятивистской частицы

$$\vec{F} = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^4}\beta\gamma^2\left|\vec{E}_\perp + [\vec{\beta}\times\vec{H}]\right|^2.$$

5.1. Преобразование полей. Инварианты поля

5.1. Оси координат двух инерциальных систем отсчета параллельны между собой, относительная скорость систем направлена вдоль оси X, и при $t = t' = 0$ начала координат O и O' совпадают. Используя известные формулы преобразования Лоренца координат и времени для этих систем, найти матрицу $\Lambda^i_{.k}$ такую, что $x'^i = \Lambda^i_{.k}x^k$[6].

[6]Иногда используется другое определение 4-вектора: $x_i = (x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (\vec{r}, ict)$. Мнимая единица $i = \sqrt{-1}$, фигурирующая в определении компоненты $x_4 = ict$, физического смысла не несет и позволяет, используя стандартное определение скалярного произведения, получить правильные знаки получающихся выражений. При этом необходимо иначе определить матрицу Λ_{ik}.

5.2. Используя матрицу $\Lambda^i_{.k}$ преобразований Лоренца, найденную в предыдущей задаче, записать формулы преобразования для следующих 4-векторов: $p^i = (\frac{\mathcal{E}}{c}, \vec{p})$ (4-вектор энергии-импульса), $k^i = (\frac{\omega}{c}, \vec{k})$ (волновой 4-вектор), $A^i = (\varphi, \vec{A})$ (4-вектор потенциала), $j^i = (c\rho, \vec{j})$ (4-вектор плотности тока).

5.3. Найти величину следующих инвариантов и физический смысл некоторых из них: $p^2 = p_i p^i; k^2 = k_i k^i; j^2 = j^k j_k; x^2 = x^k x_k; p_i x^i$; $k_i x^i; A_i j^i$.

5.4. Точечный заряд q покоится в системе K' в точке $\vec{r'} = (x', y'z')$. Система K' движется относительно K со скоростью $\vec{v}$ вдоль оси X. Найти: а) скалярный и векторный потенциалы в системе K; б) электрическое и магнитное поля, используя найденные значения потенциалов. Установить связь между значениями полей в системах K' и K.

5.5. а) Свет частоты ω_0 падает по нормали к поверхности плоскости зеркала, движущегося со скоростью $\vec{v}$ в направлении падающего света. Найти частоту отраженного света. б) Свет падает под углом θ к нормали зеркала, движущегося в направлении этой нормали со скоростью $\vec{v}$ (зеркало «уходит» от падающего света). Найти угол отражения.

5.6. Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A^i = (A_0, \vec{A})$, если направление относительной скорости $\vec{v}$ систем отсчета произвольно.

5.7. 4-тензором второго ранга называется совокупность 16 величин F^{ik}, преобразующихся при переходе из одной системы отсчета в другую как произведения соответствующих компонент 4-вектора A^i, A^k, т.е. по правилу $F'^{ik} = \Lambda^i_{.m}\Lambda^k_{.n}F^{mn}$. а) Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется 4-тензор второго ранга при пространственных поворотах; б) показать, что компоненты антисимметричного тензора второго ранга (т. е. тензора, компоненты которого обладают

свойством $F^{ik} = -F^{ki}$) преобразуются при пространственных поворотах как компоненты двух независимых трехмерных векторов.

5.8. Используя выражения для электрического $\vec{E}$ и магнитного $\vec{H}$ полей через компоненты 4-вектора потенциала $A^i = (\varphi, \vec{A})$, найти компоненты 4-тензора электромагнитного поля.

5.9. Показать, что уравнение $\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} j^i$ соответствует уравнениям Максвелла $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho$, а уравнение $\frac{\partial \tilde{F}^{ik}}{\partial x^k} = 0.$ – уравнениям $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ и $\operatorname{div} \vec{H} = 0$.

5.10. Исходя из определения 4-тензора второго ранга (задача 5.7), показать, что при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую компоненты полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, являющиеся компонентами 4-тензора электромагнитного поля, преобразуются по формулам $\vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}{}', \vec{H}_{\parallel} = \vec{H}_{\parallel}{}', \vec{E}_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp}{}' - [\vec{\beta} \times \vec{H}_{\perp}{}'])$ и $\vec{H}_{\perp} = \gamma(\vec{H}_{\perp}{}' + [\vec{\beta} \times \vec{E}_{\perp}{}'])$, где индексы $\parallel$ и $\perp$ характеризуют параллельные и перпендикулярные компоненты полей относительно вектора относительной скорости инерциальных систем отсчета. Записать единые формулы для преобразования полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$.

5.11. Найти инвариант $F^{ik}F_{ik}$ электромагнитного поля. Используя формулы преобразования полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$, найденные в предыдущей задаче, доказать инвариантность величины $(\vec{E} \cdot \vec{H})$ при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую.

5.12. Покажите, что если: а) $\vec{E} \perp \vec{H}$ в K, то $\vec{E}' \perp \vec{H}'$ в K'; б) $E > H$ в K, то $E' > H'$ в K'; в) угол между $\vec{E}$ и $\vec{H}$ тупой (острый) в K, то он останется тупым (острым) и в K'; г) $\vec{E} \perp \vec{H}$ в K, то существует K', в которой или $\vec{E}' = 0$ (при $|\vec{E}| < |\vec{H}|$) или $\vec{H}' = 0$ (при $|\vec{H}| < |\vec{E}|$), (K и K' – две инерциальные системы отсчета).

5.13. В скрещенных полях $\vec{E} \perp \vec{H}$ движется заряженная частица. С какой скоростью и в каком направлении она должна двигаться,

чтобы её траектория оставалась прямолинейной, а скорость — постоянной?

5.14. В лабораторной системе заданы однородные электрическое $\vec{E}$ и магнитное $\vec{H}$ поля. Определить скорость системы отсчета, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Чему они равны?

5.15. В системе K $\vec{E} \perp \vec{H}$. Какова скорость системы K', в которой останется лишь одно из полей?

5.16. Встречные линейные пучки ультрарелятивистских электронов и позитронов с одинаковыми токами и поперечными круговыми сечениями имеют энергии $T_{e^-} = 100$ ГэВ и $T_{e^+} = 300$ Гэв. Указать такую систему отсчета и найти её скорость, чтобы в ней электрическое поле, создаваемое пучками на границе, было минимально.

5.17. Вдоль бесконечного (полого) цилиндра, равномерно заряженного с линейной плотностью заряда $\varkappa$, течет ток J. Найти скорость системы отсчета, в которой останется лишь одно из полей (электрическое или магнитное). Найти величину этого поля.

5.18. Исходя из законов преобразования полей, найти поля $\vec{E}$ и $\vec{H}$ движущегося равномерно точечного заряда q. Убедиться в сплющивании электрического поля в направлении движения. Как согласовать это изменение продольной компоненты с формулой $\vec{E}_\parallel = \vec{E}_\parallel{}'$?

5.19. Найти электромагнитное поле, создаваемое электрическим диполем с дипольным моментом $\vec{d}$, движущийся с постоянной скоростью v.

5.20. Перпендикулярно магнитному полю $\vec{H}$ с равными скоростями v движутся два диэлектрических одинаковых шарика (радиус — a, проницаемость — ε). Расстояние между центрами шариков — $l \gg a$. Найти силу взаимодействия шариков.

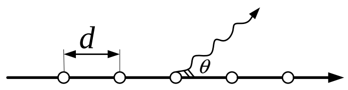
5.21. Металлический шар из немагнитного металла движется равномерно в постоянном магнитном поле $\vec{H}$ со скоростью $\vec{v}$, направлен-

ной под углом θ к $\vec{H}$. Найти выражение напряженности электрического поля $\vec{E}$ внутри и вне шара в его лабораторной системе отсчета. Чему равна объемная плотность индуцированных зарядов внутри шара. Получить выражение для поверхностной плотности индуцированных зарядов. Магнитным полем движущихся зарядов пренебречь.

5.22. Поле ультрарелятивистской заряженной частицы почти поперечно и $E \approx H$, т. е. у него те же свойства, что и у электромагнитной волны. Показать, что число эквивалентных фотонов сопровождающего излучения заряженной частицы $N_\omega \mathrm{d}\omega = \frac{2\alpha}{\pi}\ln(\frac{\gamma c}{\omega b_{\min}})\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$, где $\alpha = \frac{e\hbar}{c} \approx \frac{1}{137}$, $b_{\min} \sim \frac{\hbar}{mc}$, т. е. $N_\omega \mathrm{d}\omega = \frac{2\alpha}{\pi} \cdot \ln(\frac{\mathcal{E}}{\hbar\omega}) \cdot \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}$

5.2. Излучение релятивистской частицы. Синхротронное излучение. Переходное излучение. Излучение Вавилова—Черенкова. Торможение излучением

5.23. Узкий пучок электронов с энергией $T = 300$ кэВ ($m_e c^2 = 511$ кэВ) движется параллельно поверхности металлической дифракционной решетки перпендикулярно штрихам.



Расстояние между узкими соседними штрихами-бороздами на ней $d = 1,67 \cdot 10^{-4}$ см. Найти: а) период излучения, наблюдаемого под углом θ к оси пучка; б) характерную длину волны λ; в) цвет, который должен наблюдаться для угла $\theta = 15^\circ$.

5.24. Переходом из системы, где частица покоится, а ускорение её $\vec{a}$, в систему, где её скорость $v \sim c$, получить формулу полного излучения 4-импульса:

$$\Delta p^i = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^5}\int \left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)\mathrm{d}x^i.$$

В частности,

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{a^2 - \frac{1}{c^2}[\vec{v}\times\vec{a}]^2}{(1-\frac{v^2}{c^2})^3}\mathrm{d}t$$

или

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\{\vec{E} + [\frac{\vec{v}}{c}\times\vec{H}]\}^2 - \frac{1}{c^2}(\vec{E}\vec{v})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\mathrm{d}t.$$

5.25. Показать, что если скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ частицы параллельны, то в дальней зоне

$$\vec{H} = \frac{e}{c^2R}\frac{[\vec{a}\times\vec{n}]}{(1-\frac{1}{c}(\vec{n}\vec{v}))^3},$$

а интенсивность излучения под углом θ:

$$\mathrm{d}I = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{a^2\sin^2\theta}{(1-\frac{v}{c}\cos\theta)^6}\mathrm{d}\Omega.$$

5.26. Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$, полную мгновенную интенсивность излучения I и суммарную (по всем направлениям) скорость потери энергии $(-\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t')$ релятивистской частицы, скорость которой $\vec{v}$ параллельна её ускорению $\dot{\vec{v}}$ (в момент $t' = t - r/c$). Показать, что ультрарелятивистская частица излучает главным образом внутри конуса с углом раствора $\theta \sim 1/\gamma$.

5.27. То же, что и в предыдущей задаче в случае, когда скорость $\vec{v}$ и ускорение $\dot{\vec{v}}$ частицы перпендикулярны друг другу.

5.28. Электрон со скоростью $v \sim c$ пролетает через область однородного электрического поля напряженности $\vec{E}$. Протяженность области $d; \vec{v} \parallel \vec{E}$. Найти: а) угловое спектральное распределение излучения электрона; б) полное излучение; в) изменение импульса электрона за время пролета области поля, $\gamma mc^2 \gg U$ $(U = Ed)$.

5.29. Релятивистский электрон движется со скоростью v в постоянных однородных взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях, причем $|\vec{E}| > |\vec{H}|$. Определить излучение в единицу времени.

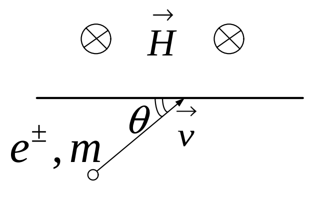
5.30. а) Найти интенсивность излучения заряженной частицы, равномерно движущейся по окружности в поле со скоростью $v \sim c$. б) Показать, что основная часть излучения сосредоточена в области частот, где $\omega \sim \omega_0\gamma^3 = e\frac{H\gamma^2}{mc}$.

5.31. При какой энергии электрона (в электрон-вольтах), движущегося по круговой орбите в магнитном поле H, его синхротронное излучение имеет максимум, соответствующий красному цвету ($\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см)? $H = 17 \cdot 10^3$ Э, $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ $CGSE$, $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г, $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с, 1 эВ $= 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг.

5.32. При какой энергии электрона, движущегося по окружности радиуса $R = 10$ м, в его синхротронном излучении имеется значительное количество фотонов с энергией $\mathcal{E}_\gamma = 250$ эВ? (Постоянная Планка $\hbar = 6 \cdot 10^{-16}$ эВ$\cdot$ с.)

5.33. а) Определить закон изменения энергии со временем для заряда, движущегося по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле и теряющего энергию путём излучения. б) Показать, что энергия, теряемая за один оборот, равна $\mathcal{E}_{\text{изл}} = \frac{4\pi}{3}\frac{e^2}{R}\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^4\left(\frac{v}{c}\right)^3$. в)Найти траекторию заряда, если энергетические потери за оборот много меньше полной энергии заряда.

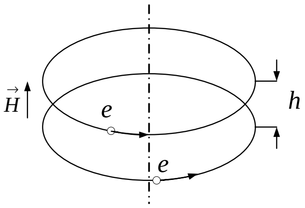
5.34. В однородное магнитное поле H влетают ультрарелятивистские частицы (электрон e^- и позитрон e^+) со скоростью $\vec{v}\perp\vec{H}$, направленной под углом θ к плоской границе поля, как показано на рисунке. Найти энергию, потерянную каждой частицей на синхротронное излучение.



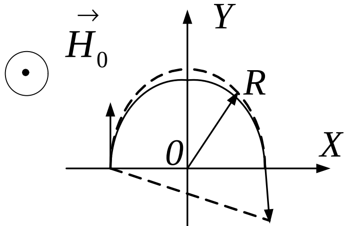
5.35. Найти угловое распределение $\frac{\overline{dI}}{d\Omega}$ интенсивности излучения заряженной релятивистской частицы (вращающейся по окружности со скоростью v во внешнем однородном магнитном поле $\vec{H}$), усредненное за период обращения частицы в магнитном поле.

5.36. Две нерелятивистские частицы с одинаковой массой m и имеющие равные, но противоположные по знаку заряды q движутся по окружности. Считая потерю энергии на излучение малой по сравнению с начальной энергией системы $\mathcal{E}_0$, найти зависимость от времени полной энергии $\mathcal{E}(t)$ и расстояния до центра $r(t)$.

5.37. Два электрона с энергией $\mathcal{E} = 300$ МэВ движутся по соосным окружностям в магнитном поле $H = 10$ кЭ. Между плоскостями орбит расстояние h. Как должны быть расположены электроны на своих орбитах, чтобы суммарная излучаемая электронами мощность была максимально возможной? Найти суммарную излучаемую мощность в этом случае для $h_1 = 0,5\mu$м и $h_2 = 1$ мм и выразить ее в единицах эВ/с.



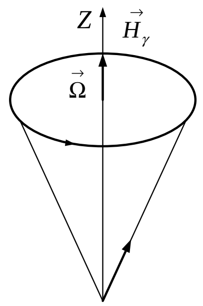
5.38. Электрон влетает в полупространство $y \geq 0$, занятое однородным магнитным полем $H_0\vec{e_z}$, имея скорость на входе, параллельную оси Y, $v \simeq c$. За счет излучения траектория электрона будет несколько отличаться от полуокружности с радиусом R. Вычислить, под каким углом к оси Y электрон покинет полупространство $y > 0$. Оценить, на сколько полное смещение электрона вдоль оси X при движении в поле $\vec{H_0}$ меньше $2R$?



5.39. Найти поперечное расстояние между протонной и позитронной компонентами пучка протонов и позитронов, имеющих одинаковый импульс $p = 300$ МэВ/с, после прохождения в поперечном однородном магнитном поле пути $l = 10$ м, ($H = 18$ кЭ, заряд

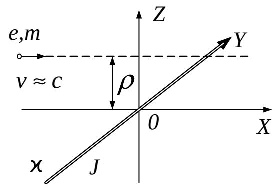
$e^+ = 5 \cdot 10^{-10} CGSE, mc^2 = 0,5$ МэВ).

5.40. Электрон, вращающийся в магнитном поле $\vec{H}$ по круговой орбите радиуса R, излучает (см. задачу 5.30). Оказывается, что при этом его магнитный момент $\vec{\mu}$ ориентируется вдоль $\vec{H}$. На языке классической электродинамики эта поляризация описывается как изменение угла между $\vec{\mu}$ и $\vec{H}'$ в результате потери энергии $(\vec{\mu}\vec{H}')$ на магнитодипольное излучение ($\vec{H}'$ — магнитное поле в системе электрона). Оценить время поляризации (численный пример: для накопителя ВЭПП-3 ИЯФ СО РАН $R = 8$ м, $\mathcal{E} = 2$ ГэВ).



5.41. Определить полное излучение релятивистской частицы с зарядом e, пролетающей на прицельном расстоянии ρ без изменения траектории в следующих полях: а) ядра Ze; б) монополя Дирака с магнитным зарядом $g \simeq 70\ e$; в) точечного электрического диполя $\vec{p}$, перпендикулярного траектории; г) бесконечного тока J, перпендикулярного траектории. Получить ограничения на параметры неискривляющейся траектории. Найти нерелятивистский предел.

5.42. Две бесконечные нити, расположенные рядом, практически совпадают с осью Y. По одной из них идет ток J, другая несет на себе электрический заряд, распределенный по нити с постоянной линейной плотностью $\varkappa$. В поле этих нитей вдоль оси X с прицельным параметром ρ из бесконечности пролетает частица (заряд — e, масса — m, скорость — $v \sim c$). Считая изменение вектора скорости частицы $\vec{v}$ пренебрежимо малым, найти полную энергию, излученную частицей.



5.43. Найти среднюю мощность излучения ультрарелятивистского атома с поляризуемостью α, летящего вдоль оси X со скоростью v в знакопеременном магнитном поле $H_z = H_0 \sin(\frac{2\pi x}{L})$. Какова поля-

ризация и максимально возможная частота излучения вперед?

5.44. Переменное с частотой ω магнитное поле бетатрона разгоняет электрон и одновременно удерживает его на орбите постоянного радиуса R. Найти значение энергии электрона, при которой потери на излучение за оборот сравниваются с приобретаемой энергией.

5.45. Излучение релятивистского электрона, движущегося в однородном магнитном поле $H = 1,5 \cdot 10^4$ Э по орбите радиуса $R = 50$ см, наблюдается невооруженным глазом. Оценить видимый «размер» излучающего электрона.

5.46. Можно ли увидеть невооруженным глазом единственный позитрон с энергией $\mathcal{E} = 400$ МэВ, вращающийся в магнитном поле ускорителя $H = 2 \cdot 10^4$ Э? Порог чувствительности глаза составляет около $p \approx 0,5$ кэВ/с.

5.47. Определить спектральное распределение излучения, возникающего при испускании заряженной частицы, движущейся со скоростью $v \sim c$ (β-распад). Получить нерелятивистский предел, проверив его непосредственным расчетом.

5.48. Определить длинноволновую часть переходного излучения при упругом отражении заряженной частицы: а) от плоскости; б) от сферы радиуса R, если прицельный параметр частицы $\rho < R, (\beta \ll 1)$.

5.49. а) Определить спектральное и угловое распределение длинноволновой части спектра переходного излучения, возникающего при падении заряженной частицы на плоскую границу проводника. Ускорением из-за взаимодействия с изображением пренебречь. б) То же при переходе заряженной частицы через плоскую границу раздела двух диэлектриков с проницаемостями $\varepsilon_1 = 1$ и $\varepsilon_2 = \varepsilon$ соответственно (рассмотреть нерелятивистский предел).

5.50. а) Ультрарелятивистский электрон пролетает по оси малого

отверстия в бесконечной, идеально проводящей плоскости. Пренебрегая ускорением электрона, найти спектральное угловое распределение переходного излучения частицы. б) Оценить полную потерю энергии ультрарелятивистского электрона при его пролете через заземленную сетку с характерным размером ячейки a.

5.51. Сквозь заземленное металлическое проволочное кольцо радиуса R и емкости C_0 $(C_0 = \pi R/\ln \frac{8R}{r})$, где r — радиус проволоки) вдоль его оси быстро пролетает нерелятивистский электрон (заряд — e, масса — m), имевший на большом расстоянии от кольца скорость v. Найти потерю энергии электрона на излучение.

5.52. Заряженная частица со скоростью $v > \frac{c}{n}$ проходит сквозь прозрачную пластинку (показатель преломления n) перпендикулярно плоскости пластинки. Найти длительность зарегистрированного в лаборатории черенковского излучения и его поток энергии через поверхность пластинки, пренебрегая краевыми эффектами.

5.53. а) Показать, что скорость точки пересечения двух поступательно движущихся прямых может быть как угодно велика, в частности много больше c — скорости света в вакууме. б) Исходя из предыдущей задачи, покажите, что возможно черенковское излучение в вакууме, например, в такой постановке: пучок электронов, падая под небольшим углом на границу диэлектрика, одновременно движется вдоль этой границы за счет смещения источника электронов. Скорость движения пятна на диэлектрике превышает скорость света в вакууме.

5.54. Показать, что сила торможения излучением в релятивистском случае $(v \sim c)$:

$$f_x = -\frac{2}{3}\frac{e^4}{m^2c^5}(F_{kl}u_l)^2 v_x = -\frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

5.55. Показать, следуя И. Померанчуку, что оставшаяся после пролета через поле энергия ультрарелятивистской заряженной частицы не может превышать $\mathcal{E}_{\text{крит}}$, где

$$\frac{1}{\mathcal{E}_{\text{крит}}} = \frac{2}{3}\frac{1}{m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left\{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2\right\}\mathrm{d}x.$$

5.56. Какую максимальную энергию может излучить ультрарелятивистская частица, пройдя область однородного магнитного поля?

5.3. Решение типичных задач

Решения этих задач взяты нами из статьи И.Б.Хрипловича «Synchrotron Radiation Without Special Functions» в Сибирском физическом журнале, 1995, №3, сохранив по возможности стиль этой на наш взгляд весьма поучительной статьи. Мы решили также не переводить ее на русский язык, надеясь, что чтение физического текста на английском языке будет полезно нашим студентам.

The synchrotron radiation (SR), i.e. the radiation of a charged particle in an external magnetic field, is discussed in numerous textbooks, some of them being truly excellent. However, as a rule, the essential features of the ultrarelativistic SR are derived in a rather formal, mathematical way, the treatment lacking the intuitive, physical element. The aim of the present article is to fill in this gap. It justifies perhaps the publication, though an essential part of the paper is in fact a kind of folklore, well-known at least among my colleagues at the Budker Institute of Nuclear Physics.

P.51. We will start with the total intensity of radiation. In the comoving (with electron) inertial frame (CIF) it is

$$I' \sim e^2(a')^2 \sim \frac{e^4}{m^2}(E')^2 . \tag{1}$$

Here e and m are the electron charge and mass, a is its acceleration, E is the electric field strength; I, a and E are supplied with primes to indicate that they refer to the CIF. E' is obtained from the laboratory frame (LF) magnetic field B by the Lorentz transformation

$$E' \sim B\gamma, \tag{2}$$

where

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)}}.$$

Here and below we use the units where the velocity of light $c = 1$, and omit in our qualitative treatment numerical factors.

Let us recall now that I is an invariant. Rather unusual demonstration of this fact is as follows. The radiation intensity is obviously expressed through the emission probability W and the photon energy $\hbar\omega$ as

$$I = W\hbar\omega.$$

Then, the probability W in the laboratory frame is related to that in the CIF, W, in the following way:

$$W = W'/\gamma.$$

(just recall that the life-time of an unstable particle in the LF is γ times larger than that in the CIF). On the other hand, it is well-known that

$$\omega = \omega'\gamma.$$

Therefore, indeed

$$I = I'.$$

Now, substituting into formula (P.51.1) expression (P.51.2) for the CIF electric field E', we obtain the well-known result:

$$I \sim \frac{e^4}{m^2} B^2 \gamma^2. \tag{3}$$

If instead of the magnetic field B, we fix the curvature radius r_0 of the electron trajectory, related to B as

$$eB = m\gamma/r_0,$$

the expression for the total intensity becomes

$$I \sim \frac{e^2\gamma^4}{{r_0}^2}. \tag{4}$$

P.52. Let us go over to the radiation angular distribution. In the CIF it is a simple dipole one, mere trigonometry. In other, words, typical-angles in the CIF are

$$\theta' = k_t{}'/k_l{}' \sim 1.$$

Here $k'_{t(l)}$ is the transverse (longitudinal) component of the photon wave vector. In the LF those components are:

$$k_t = k'_t, \quad k_l = k'_l\gamma$$

Therefore, in the LF ultrarelativistic electron radiates into a cone with the characteristic angle

$$\theta_c \sim k_t/k_l \sim \gamma^{-1}. \tag{1}$$

P.53. An observer receives the radiation only while staying inside the radiation cone which rotates together with the electron. Then a simple consideration demonstrates that the electron radiates at the observer only from a trajectory arc of the same angular size as the cone itself. In the present case it means that the size of the arc is $\theta_c \sim \gamma^{-1}$. In other words, the radiation formation length which coincides in our ultrarelativistic problem $(v \sim c = 1)$ with the radiation formation time, is

$$\Delta t \sim r_0\theta_c \sim r_0\gamma^{-1}. \tag{1}$$

Then the duration of the signal receiving is, taking into account the longitudinal Doppler effect,

$$\delta t = (1 - \vec{n}\vec{v})\Delta t \sim (\theta^2 + \gamma^{-2})\Delta t, \tag{2}$$

where $\vec{n} = \vec{k}/k$. At $\theta \sim \theta_c \sim \gamma^{-1}$ we obtain

$$\delta t_c \sim r_0\gamma^{-3}.$$

It means that the characteristic radiation frequency is γ^3 larger than the electron revolution frequency ω_0:

$$\omega_c \sim \delta t_c^{-1} \sim \gamma^3 r_0^{-1} \sim \gamma^3 \omega_0. \tag{3}$$

P.54. We turn now to the spectral distribution of the synchrotron radiation. Its intensity falls off rapidly at $\omega >> \omega_s$. Let us assume for it a power law at $\omega << \omega_c$:

$$I(\omega) \sim \omega^\nu.$$

Then, comparing the total intensity as given by the integral

$$\int^{\omega_c} \mathrm{d}\omega I(\omega) \sim \omega_c^{\nu+1} \sim \gamma^{3(\nu+1)}$$

with formula (P.51.4), we obtain $\nu = 1/3$. In other words,

$$I(\omega) \sim \omega^{1/3} \ \text{ at } \ \omega \le \omega_c, \tag{1}$$

or

$$I_n \sim n^{1/3} \ \text{ at } \ n \le \gamma^3, \tag{2}$$

for the discrete spectrum.

P.55. And at last we will find characteristic radiation angles θ for the spectral region

$$\omega_0 << \omega << \omega_c, \ \text{ or } \ 1 << n << \gamma^3.$$

One may expect here that $theta$ is larger than γ^{-1}. Now, with a radiation cone of the angle $\theta << 1$, the electron radiates at the observer only from a trajectory arc of the same angular size θ. Then relation (P.53.2) transforms to

$$\delta t \sim \omega^{-1} \sim \theta^2 \Delta t \sim \theta^3 r_0 \sim \theta^3 \omega_0^{-1}. \tag{1}$$

Therefore

$$\theta \sim (\omega/\omega_0)^{-1/3} \sim n^{-1/3}. \tag{2}$$

In conclusion let us emphasize that the results obtained apply to the classical

radiation not only at the finite motion of an ultrarelativistic particle in magnetic field, but in the more general case as well, that of scattering in external electromagnetic fields, if the deflection angle exceeds γ^{-1}.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ

1. КИНЕМАТИКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

1.2. В момент t фронт волны, испущенной в момент t', описывается уравнением

$$\left(x-\left(\frac{eE}{2m}\right)t'^2\right)^2+y^2+z^2=c^2\left(t-t'\right)^2,$$

где x — расстояние, пройденное электроном (движущимся вдоль оси X от начальной точки $x=0$) за время t'.

1.3. $E\simeq 7,2$ В/см; $H\simeq 2,4\cdot 10^{-2}$ эрстед.

1.6. $\vec{E}_1'=E_x\cos(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi)\vec{e}_x', \ \vec{E}_2'=E_y\sin(\omega t-\vec{k}\vec{r}+\varphi)\vec{e}_y'$, где система ортов $\vec{e}_x', \vec{e}_y'$ повернута относительно заданной системы $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ на угол β, такой, что $\mathrm{tg}2\beta=\frac{2ab\cos\chi}{\left(a^2-b^2\right)}$. Амплитуды E_x и E_y волн равны $E_x=a\cos\beta+be^{i\chi}\sin\beta$; $E_y=a\sin\beta-be^{i\chi}\cos\beta$

1.7. При $E_{\text{л}}=E_{\text{п}}$ поляризация линейная; $E_{\text{л}}<E_{\text{п}}$ — эллиптическая правая; $E_{\text{л}}>E_{\text{п}}$ — эллиптическая левая; $E_{\text{л}}=0$ — круговая правая; $E_{\text{п}}=0$ — круговая левая.

1.8. $I_N=I_0\cos^{2N}\alpha, I_{50}\simeq 0,95\,I_0$.

1.9. $\omega=\gamma\omega'(1+\vec{n}'\vec{\beta})$ или $\omega=\frac{\omega'}{\gamma(1-\vec{n}\vec{\beta})}$;
$\vec{k}=\gamma(\vec{k}'+\vec{\beta}\frac{\omega'}{c})+\frac{\gamma-1}{\beta^2[[\vec{k}'\times\vec{\beta}]\times\vec{\beta}]}$, где $\vec{n}=\frac{\vec{k}}{k}, \vec{n}'=\frac{\vec{k}'}{k}, k=\frac{\omega}{c}, k'=\frac{\omega'}{c}$.

1.10. $v\simeq 7,5\cdot 10^4$ км/с.

1.11. Если ω_0 — частота в системе, где источник покоится, а β — скорость источника относительно приемника, то приемник зарегистрирует частоту $\omega=\omega_0\sqrt{1-\beta^2}$ («красное смещение»). В системе, связанной с источником, луч распространяется под углом θ к направлению движения источника, таким, что $\cos\theta=-\beta$.

1.12. а) $\lambda = \lambda_0\sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$; б)$\lambda = \lambda_0\sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)}$.

1.13. $n = \frac{\Delta\nu/\nu_0}{\beta} \simeq 0,5$.

1.14. $I(\nu) = I_0 exp[-(\frac{\nu-\nu_0}{\delta/2})^2]$, где $\delta/2 = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{2RT/\mu}$. Здесь μ — молярная масса газа, R — газовая постоянная.

1.15. $\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta}$, $I = I_0\frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta\cos\theta)^2}$; $\omega = \omega_0$ при θ_0, таком, что $\cos\theta_0 = \frac{1}{\beta}(1-\sqrt{1-\beta^2})$. В угле $0 \le \theta \le \theta_0$ $N_1 = 2\pi I_0(1-\beta^2)^{1/2}(1+\cos\theta_0)$ и в угле $\theta_0 \le \theta \le \pi$ $N_2 = 2\pi I_0(1-\beta^2)^{1/2}(1-\cos\theta_0)$.

1.17. $R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$, $D = \frac{4n}{(n+1)^2}$, где $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления среды.

1.19. $\operatorname{tg}\beta^* = \frac{n^2\operatorname{tg}\beta}{(\cos\alpha\cdot\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}+\sin^2\alpha)^2}$.

1.20. $a = \frac{n\lambda_2}{4}$, где $n = 1, 2, ...$; λ_2 — длина волны в среде 2. Отражение отсутствует при $\varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$.

1.21. $R \simeq \pi^2(n^2-1)^2\frac{d^2}{\lambda^2}$.

1.22. Для $E_\perp$ — волны (1 — отраженная, 2 — преломленная; индексы $\perp$ и $\|$ относятся к перпендикулярным и параллельным компонентам поля, лежащим в плоскости падения волны):

$$E_1^\perp = \frac{\sin(\psi-\varphi)}{\sin(\psi+\varphi)}E_0^\perp = \frac{\cos\varphi-\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\cos\varphi+\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}E_0^\perp;$$

$$E_2^\perp = \frac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\psi+\varphi)}E_0^\perp = \frac{2\cos\varphi}{\cos\varphi+\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}E_0^\perp.$$

Для $E_\|$-волны: $E_1^\| = \frac{\operatorname{tg}(\psi-\varphi)}{\operatorname{tg}(\psi+\varphi)}E_0^\| = \frac{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}-n^2\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}+n^2\cos\varphi}E_0^\|$; $E_2^\| = \frac{2\sin\psi\cos\varphi}{\sin(\psi+\varphi)\cos(\psi-\varphi)}E_0^\| = \frac{2n\cos\varphi}{n^2\cos\varphi+\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}E_0^\|$. В этих формулах φ — угол преломления $(\sin\psi = \frac{\sin\varphi}{n})$. Коэффициенты отражения R и прохождения T равны соответственно $R = \left(\frac{E_1}{E_0}\right)^2$, $T = n\left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2$, при этом $R+T\left(\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}\right) = 1$, где косинусы учитывают сечения пучков.

1.23. При $\varphi = \varphi_{\text{Бр}}$, где угол Брюстера определяется соотношением $\operatorname{tg}\varphi_{\text{Бр}} = \frac{n_2}{n_1}$ (волна падает из среды 1).

1.24. Сдвига фаз $\delta_\perp$ и $\delta_\parallel$ между $E_1^\perp, E_0^\perp$ и $E_1^\parallel$, $E_0^\parallel$ определяются из

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\delta_\perp}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{\cos\varphi} \text{ и } \operatorname{tg}\left(\frac{\delta_\parallel}{2}\right) = \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - n^2}}{n\cos\varphi}.$$

Волна эллиптически поляризована. При $E_0^\perp = E_0^\parallel$ и $\delta_\parallel - \delta_\perp = \frac{\pi}{2}$ волна поляризована по кругу; последнее возможно, если $2n \le 1 - n^2$, где $n \lesssim 0,414$.

1.25. $T = \left(\frac{E_2}{E_0}\right)^2 = \left[\operatorname{ch}^2\alpha a + (\frac{\alpha^2-k^2}{2\alpha k})^2 \operatorname{sh}^2\alpha a\right]^{-1}$; $\alpha = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\sin^2\varphi - 1}$, $k = \frac{\omega\varepsilon}{c}\cos\varphi$.

1.26. В обозначениях задачи 1.22:
для отраженной волны

$$E_1^\perp = \frac{\mu\cos\varphi - \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\varphi}}{\mu\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\varphi}} E_0^\perp \text{ и } E_1^\parallel = \frac{-\varepsilon\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\varphi}}{\varepsilon\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\varphi}} E_0^\parallel;$$

для преломленной волны

$$E_2^\perp = \frac{2\mu\cos\varphi}{\mu\cos\varphi + \sqrt{\varepsilon\mu - \sin^2\varphi}} E_0^\perp \text{ и } E_2^\parallel = \frac{2\sqrt{\mu}\cos\varphi}{\sqrt{\varepsilon}\cos\varphi + \sqrt{\mu - \sin^2\varphi}} E_0^\parallel.$$

Здесь $\mu = \mu_2/\mu_1$, $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$.

1.27. $\Delta = (r_\parallel - r_\perp)/(1 - r_\parallel \cdot r_\perp)$.

1.28. $T = 1/(1 + \frac{2\pi\sigma}{c})^2$, ($\varepsilon = \mu = 1$ всюду!).

1.29. $E(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos(\frac{u^3}{3} - u\xi)\mathrm{d}u$, где $\xi = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_1}\right)^{1/3}(z - z_1)$, ($z_1 = \frac{\omega^2}{4\pi e^2 N_0/m}$, так что $\varepsilon = 1 - z/z_1$).
Для $\xi \gg 1$ $E(\xi) = \frac{A}{\xi^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$, а для $\xi \ll -1$
$E(\xi) = \frac{A}{2|\xi|^{1/4}}\exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/4}\right)$.

1.30. а) $\sin\varphi/\sin\psi = n_2/n_1$ (свет падает под углом φ из среды с показателем преломления n_1); б) $f^{-1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ и $f = R/2$ для сферического зеркала.

1.31. 2) В соответствии с обозначениями на рисунке к задаче $h_{1,2} = \mp\frac{f(n-1)d}{nR_{2,1}}$, $f = f_1 = f_2$, $f^{-1} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{d(n-1)^2}{nR_1R_2}$.

1.32. $d = \frac{n}{n-1}\left(|R_1| + |R_2|\right)$.

1.33. $f = \frac{R_1R_2/2}{nR_1+(n-1)R_2}$.

1.34. $\ell \simeq$15,3 см; увеличение равно $\eta \simeq -1,6$.

1.35. $f^{-1} = 1/f_1 + 1/f_2 - \ell/f_1f_2$. Расстояния от линзы 1(2) до входной (выходной) главных плоскостей равны соответственно $\mp\frac{\ell f_{1,2}}{\ell-f_1-f_2}$, так что расстояние между главными плоскостями равно $\ell^2 f/f_1f_2$.

1.36. Прямое сильно увеличенное (в ~ 500 раз) изображение будет расположено практически в бесконечности.

1.37. а) Расстояние от точки выхода пучка из n-й линзы до оптической оси системы равно $x_n = A\sin(n\alpha+\beta)$, где $\cos\alpha = 1 - \frac{d}{2f}$, а константы A и β определяются координатой и углом входа луча в первую линзу; при $d < 4f$ решение неустойчиво. б) $x_n = A\sin(n\alpha+\beta)$, где $\cos 2\alpha = 1 - \frac{1}{2}\frac{d^2}{f^2}$, A и β находятся из начальных условий на входе в первую линзу.

1.38. $\frac{1}{\rho} = \frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}N}$, где $\vec{N}$ — направление главной нормали к лучу.

1.39. $\rho \simeq$ 33 000 км; $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} \simeq 1,6\cdot 10^{-9}$ см$^{-1}$.

1.40. $M_{\text{пл}} = M_З/R_З \cdot \left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}\right)_З = 4M_З$. *Указание.* Плотность и температуру атмосферы планеты принять такими же, как на Земле.

1.41. $y = \frac{n_0}{k}\left(\operatorname{ch}\frac{kx}{n_0} - 1\right)$.

1.42. $\alpha_\infty - \alpha_0 = -n_0R\sin\alpha_0 \int\limits_R^\infty \frac{\mathrm{d}\ln n}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{n^2r^2 - n_0^2R^2\sin^2\alpha_0}}$.

1.43. $\alpha_\infty - \alpha_0 = 2\left(n_0 - 1\right) x_0 \mathrm{tg}\alpha_0 \int\limits_{x_0}^{\infty} e^{-\left(x^2 - x_0^2\right)} dx,$

$x_0^2 = \frac{mgR}{T}\left(1 - \sin\alpha_0\right)$ (m — масса «молекулы» воздуха, R — радиус Земли, T — температура атмосферы).

1.44. $\Delta\tau \simeq 142$ с.

2. ВОЛНЫ, ОГРАНИЧЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

2.1. Спектры обоих импульсов одинаковы.

2.2. а) $f_\omega = \frac{1}{2}\left[\delta\left(\omega - \omega_0\right) + \delta\left(\omega + \omega_0\right)\right]$; б) $f_\omega = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\beta} e^{-\omega^2/4\beta^2}$; в) $f_\omega = \frac{\tau}{2\pi}\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \equiv \frac{\tau}{2\pi}\mathrm{sinc}(\frac{\omega\tau}{2})$; г) $f_\omega = \frac{\tau}{2\pi^2}\frac{\cos(\omega\tau/2)}{1-\left(\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega\tau}{2}\right)^2}$; д) $f_\omega = \frac{\tau}{4\pi}\left(\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4}\right)^2$.

2.3. а) $\mathrm{rot}\,\vec{E}_\omega = \frac{i\omega\mu}{c}\vec{H}_\omega$, $\mathrm{div}\,\varepsilon\vec{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega$, $\mathrm{rot}\,\vec{H}_\omega = -\frac{i\omega\varepsilon}{c}\vec{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_\omega$, $\mathrm{div}\,\mu\vec{H}_\omega = 0$.

б) $i\left[\vec{k}\times\vec{E}_{\vec{k}}\right] = -\frac{1}{c}\dot{\vec{B}}_{\vec{k}}$, $i\left(\vec{k}\vec{D}_{\vec{k}}\right) = 4\pi\rho_{\vec{k}}$,
$i\left[\vec{k}\times\vec{H}_{\vec{k}}\right] = \frac{1}{c}\dot{\vec{D}}_{\vec{k}} + \frac{4\pi}{c}j_{\vec{k}}$, $\left(\vec{k}\vec{B}_{\vec{k}}\right) = 0$.

в) $\left[\vec{k}\times\vec{E}_{\vec{k}\omega}\right] = -\frac{\omega\mu}{c}\vec{H}_{\vec{k}\omega}$, $i\left(\vec{k}\vec{D}_{\vec{k}\omega}\right) = 4\pi\rho_{\vec{k}\omega}$,
$i\left[\vec{k}\times\vec{H}_{\vec{k}\omega}\right] = \frac{i\omega}{c}\vec{D}_{\vec{k}\omega} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}_{\vec{k}\omega}$, $\left(\vec{k}\vec{B}_{\vec{k}\omega}\right) = 0$.

2.4. а) $\vec{E}_\omega(r) = -\,\mathrm{grad}\,\varphi_\omega(\vec{r}) + \frac{i\omega}{c}\vec{A}_\omega(\vec{r})$, $\vec{H}_\omega(\vec{r}) = \mathrm{rot}\,\vec{A}_\omega(\vec{r})$.

б) $\vec{E}_{\vec{k}}(t) = -i\vec{k}\varphi_{\vec{k}}(t) - \frac{1}{c}\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)$, $\vec{H}_{\vec{k}}(t) = i\left[\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}(t)\right]$.

в) $\vec{E}_{\vec{k}\omega} = -i\vec{k}\varphi_{\vec{k}\omega} + \frac{i\omega}{c}\vec{A}_{\vec{k}\omega}$, $\vec{H}_{\vec{k}\omega} = i\left[\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}\omega}\right]$.

2.5. а) $\varphi_{\vec{k}} = \frac{e}{2\pi^2k^2}$, б) $\left(A_z\right)_{\vec{k}} = J/\left(\pi ck^2\right)$.

2.6. а) $\vec{E}_{\vec{k}} = -i\vec{k}\varphi_{\vec{k}} = \frac{ie\vec{k}}{2\pi^2k^2}$, б) $\vec{H}_{\vec{k}} = i\left[\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}\right] = \frac{iJ}{\pi c}\frac{\left[\vec{k}\times\vec{e}_z\right]}{k^2}$.

2.7. $\varphi_{\vec{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2}\frac{\delta\left(\vec{k}\vec{v}-\omega\right)}{k^2-\omega^2/c^2}$, $\vec{A}_{\vec{k}\omega} = \frac{e\vec{v}}{2\pi^2 c}\frac{\delta\left(\vec{k}\vec{v}-\omega\right)}{k^2-\omega^2/c^2}$;
$\vec{E}_{\vec{k}\omega} = i\frac{e}{2\pi^2}\frac{\delta\left(\vec{k}\vec{v}-\omega\right)}{k^2-\omega^2/c^2}\left(-\vec{k}+\frac{\vec{\omega}\vec{v}}{c^2}\right)$, $\vec{H}_{\vec{k}\omega} = i\frac{e}{2\pi^2 c}\left[\vec{k}\times\vec{v}\right]\frac{\delta\left(\vec{k}\vec{v}-\omega\right)}{k^2-\omega^2/c^2}$.

2.9. $v_{\text{гр}} = \Delta\omega/\Delta k$, где величина Δk определяется значением $\Delta\omega$ в соответствии с дисперсионными свойствами среды.

2.10. $\psi(x,0) = a_0\sqrt{\pi}\Delta k e^{-\Delta k^2 x^2/4}\cdot e^{ik_0 x}$.

2.11. $\psi(r,t) = 4\pi a_0\sqrt{\frac{\pi q^3}{2\rho^3}}J_{3/2}(\rho q)\,e^{i\left(\vec{k}\vec{r}-\omega_0 t\right)}$, где $J_{3/2}$ — функция Бесселя, $\rho = |\vec{r}-\vec{v}_g t|$, $\vec{v}_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ — групповая скорость пакета.

2.12. $\psi(r,\theta) = \frac{4\pi k_0}{r}\sin\frac{k_0 r\theta^2}{4}e^{ik_0 r}$.

2.13. $\psi(x,t) = a_0\sqrt{\frac{\pi}{\alpha+i\beta t}}\exp\left[-\frac{\left(x-v_g t\right)^2}{4(\alpha+i\beta t)}+i(k_0 x-\omega t)\right]\equiv$
$\equiv Ae^{i(k_0 x-\omega_0 t)}$, при этом закон дисперсии предполагается имеющим вид $\omega(k) = \omega_0 + v_g(k-k_0) + \beta(k-k_0)^2$. Пакет расплывается и уменьшается (по амплитуде во времени); при этом его «полная» интенсивность $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|A(x,t)|^2\,\mathrm{d}x$ постоянна.

2.14. $\Delta x \simeq a^2 d/v_g\Delta x_0$.

2.15. *Указание*: воспользоваться решением задачи 2.13.

2.17. $u = v-\lambda\frac{dv}{d\lambda}$; $u = v\left(1+\frac{\lambda}{n}\frac{dn}{d\lambda}\right)$, где λ — длина волны в среде, u — групповая скорость, v — фазовая скорость.

2.18. а) $u = v$; б) $u = \frac{a\sqrt{\lambda}}{2} = \frac{v}{2}$; в) $u = \frac{3}{2}\frac{a}{\sqrt{\lambda}} = \frac{3}{2}v$; г) $u = \frac{c^2}{\sqrt{c^2+b^2\lambda^2}} = \frac{c^2}{v}$; д) $u = \frac{1}{\varepsilon\mu}\frac{c^2}{\left[1+\frac{\omega/2}{\varepsilon\mu}\frac{\mathrm{d}(\varepsilon\mu)}{\mathrm{d}\omega}\right]v}$.

2.19. $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right) < c$, $u = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1-\frac{3}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right) < c$ при $\omega \ll \omega_0$; $v = c\left(1+\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) > c$, $u = c\left(1-\frac{1}{2}\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) < c$ при $\omega \gg \omega_0$.

2.20. а) $v_{\text{фаз}} = 0,495c$ и $v_{\text{гр}} = 1,01v_{\text{фаз}}$ для $\omega = 10^{14}$ Гц, $v_{\text{фаз}} = 0.448c$ и $v_{\text{гр}} = 1,246v_{\text{фаз}}$ для $\omega = 10^{15}$ Гц, $v_{\text{фаз}} = v_{\text{гр.}} = 0$

для $\omega = 10^{16}$ Гц;

б) $\tau = 2\sqrt{3}\frac{\Delta x^2}{\pi^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}k^2}\right)^{-1} \simeq 7\cdot 10^{-10}$ с и $\ell = \tau\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} \simeq 8,5$ см для $\omega = 10^{15}$ Гц.

2.21. б) $\Delta t\Delta f \simeq 0,3$; в) $\Delta t\Delta f \simeq 2$; г) $\Delta t\Delta f \simeq 1$; д)$\Delta t\Delta f \simeq 4$.

2.22. $\Delta x_{\min} \simeq \lambda/\left(2\pi\sin\theta\right)$, где 2θ — угол, под которым виден объектив микроскопа из рассматриваемого объекта.

2.23. $\Delta x \geq \sqrt{\lambda\ell}$.

2.24. $d \gg \lambda$.

2.25. $d \simeq \sqrt{\lambda\ell}$.

2.26. $\Delta x \simeq d + \frac{\lambda\ell/d}{\cos^3\theta}$.

2.27. $d \simeq \sqrt{\lambda L} \simeq 14$ км.

2.28. $d_{\text{пятна}} \simeq \lambda F/d$.

2.29. В виде кружка, так как $\theta_{\odot}\frac{\ell_{\odot}}{\ell_{\text{средн}}} > \frac{\lambda}{d}$ при $d \sim 1$ см.

2.30. а) $\lambda \lesssim 3000$ м; б) $\lambda \lesssim 10$ м.

2.31. В среде, граничащей с идеальным проводником, $E_\tau = B_n = 0$. *Указание*: Воспользоваться конечностью плотности тока в идеальном проводнике.

2.32. Для E-волны

$$E_x = \frac{ik}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x},\ E_y = \frac{ik}{\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},\ H_x = -\frac{i\varepsilon\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y},\ H_y = -\frac{i\varepsilon\omega}{c\varkappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

E_z удовлетворяет уравнению $\Delta_2 E_z + \varkappa^2 E_z = 0$, где $\varkappa^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k^2$, $v^2 = c^2/\left(\varepsilon\mu\right)$, $\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Для H-волны в приведенных выше формулах следует сделать замены $E \leftrightarrow H$ и $\varepsilon \leftrightarrow -\mu$.

2.34. Для E-волны:

$$E_z = A_{mn}\sin\frac{\pi m x}{a}\sin\frac{\pi n y}{b}e^{i(kz-\omega t)};\ (m,n = 1,2...)$$

и

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b}\right)^2}, \omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\left(\sqrt{a^2+b^2}/ab\right).$$

Для H-волны:

$$H_z = A_{mn}\cos\frac{\pi m x}{a}\cos\frac{\pi n y}{b}e^{i(kz-\omega t)};\ (m, n = 0, 1...)$$

(но $m \cdot n \neq 0$!). Значение ω то же, а $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon\mu}a}$ (при $a \geq b$).

2.35. Для H_{10}-волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_z = 0$ и $\eta_y = \pm H_z|_{x=0,a}$; на «крыше» и «дне» — $\eta_y = 0$, $\eta_x = \pm\frac{cH_z(x)}{4\pi}|_{y=0,b}$, $\eta_z = \mp\frac{c}{4\pi}H_x(x)|_{y=0,b}$, где H_x, H_z — компоненты поля в волноводе.

Для E_{11}-волны: в боковых стенках $\eta_x = \eta_y = 0$ и $\eta_z = \pm\frac{c}{4\pi}H_y(y)|_{x=0,a}$; на «крыше» и «дне» $\eta_x = \eta_y = 0$, и $\eta_z = \mp\frac{c}{4\pi}H_x(x)|_{y=0,b}$, где H_x, H_y — компоненты поля в волноводе, η — поверхностная плотность тока.

2.36. В волноводе возбуждается H_{10}-волна, когда

$$\omega_{\min} \leq \omega \leq 1,67\omega_{\min}, \omega_{\min} = 1,9\cdot 10^{10}c^{-1}.$$

2.37. *Указание*: записать выражение для поля H_{10}-волны в виде суммы плоских монохроматических волн.

2.38. Волны электрического типа:

а) Четные решения

$$\left(E_x(x) = E_x(-x) = H_y(-x),\ E_z(x) = -E_z(-x)\right):$$

для $|x| > a$ $E_z = A\text{sign}x\cdot\exp(-s|x|)$, $E_x = A\frac{ik}{s}\exp(-s|x|)$, $H_y = A\frac{i\omega}{cs}\exp(-s|x|)$; для $|x| \leq a$ $E_z = B\sin x\cdot\exp(\varkappa x)$, $E_x = B\frac{ik}{\varkappa}\cos(\varkappa x)$, $H_y = B\frac{i\omega\varepsilon}{c\varkappa}\cos(\varkappa x)$, где $A = Be^{sa}\sin(\varkappa a)$, $\varkappa$, s определяется из уравнений: $(\varkappa a)^2 + (sa)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon\mu - 1)$ (1), $sa = \frac{1}{\varepsilon}\varkappa a\text{tg}(\varkappa a)$ (2).

б) Нечетные решения

$$\left(E_x(x) = -E_x(-x),\ H_y(x) = -H_y(-x),\ E_z(x) = E_z(-x)\right):$$

для $|x| > a$ $E_z = A\exp(-s(x))$, $E_x = \frac{ik}{s}\mathrm{sign}x \cdot \exp(-s|x|)$, $H_y = A\frac{i\omega}{cs}\mathrm{sign}x \cdot \exp(-s|x|)$; для $|x| \le a$ $E_z = B\cos(\varkappa x)$, $E_x = -B\frac{ik}{\varkappa}\sin(\varkappa x)$, $H_y = -B\frac{i\omega\varepsilon}{c\varkappa}\varkappa\sin(\varkappa x)$, где $A = Be^{sa}\cos(\varkappa a)$, $\varkappa$, s определяются из уравнений (1) и $sa = -\frac{1}{\varepsilon}\varkappa a\cdot\mathrm{ctg}(\varkappa a)$ (3). Волны магнитного типа рассматриваются аналогично. Волноводные свойства слоя следуют из того, что поле бегущей волны, как видно из результата, концентрируется в основном внутри слоя.

2.39. $\omega_* \le \omega \le \omega_* + \omega_0$.

2.40. $E^2ab = \mathrm{const}$.

2.41. $\tau \simeq \frac{1}{3}\frac{a^4\overline{\omega}^3}{c^4} \approx \frac{\pi^2 a}{c} = 3\cdot 10^{-9}$с, где $\overline{\omega} \simeq \frac{7}{6}\omega_* \simeq \frac{\pi c}{a}$.

2.42. $l \simeq 10^{-2}\frac{\tau_1\tau_2}{\beta} \simeq 10$ м, где $\beta = \frac{1}{2}\frac{1-\omega_0^2/c^2k_0^2}{k_0c^2} \simeq 4\cdot 10^{-23}$ с^2/см, а $k_0 = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{2} + \frac{\pi^2}{a^2}} \simeq 5$ см — волновое число данного СВЧ-сигнала в волноводе.

2.43. $l \simeq \sqrt{2\pi}ck_z a\sqrt{\sigma}/\omega^{3/2} \simeq 150$ м. *Указание*: Длина затухания пропорциональна отношению потока энергии в волноводе к джоулевым потерям в стенках волновода на единицу его длины.

2.44. Каждое собственное колебание описывается векторным потенциалом

$$\vec{A}: A_x = N_1\cos(k_1x)\sin(k_2y)\sin(k_3z)\,e^{-i\omega t},$$

$$A_y = N_2\sin(k_1x)\cos(k_2y)\sin(k_3z)\,e^{-i\omega t},$$

$$A_z = N_3\sin(k_1x)\sin(k_2y)\cos(k_3z)\,e^{-i\omega t},$$

где $k_i = \frac{\pi n_i}{a_i}$, $n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, ...$; $k_1N_1 + k_2N_2 + k_3N_3 = 0$; $a_1, a_2, a_3 \equiv a, b, c$.

2.45. $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a_2a_3}\sqrt{a_2^2 + a_3^2} \simeq 10^{10}c^{-1}$. (Стороны резонатора ($a_1 < a_2 < a_3$.)

2.46. *Указание*: учесть связь между электрическим $\vec{E}_0$ и магнитным $\vec{H}_0$ полями для собственных колебаний резонатора и условие $\vec{E}_\tau = \left[\vec{n} \times \vec{E}_0\right] = 0$ на поверхности резонатора.

2.47. $F_x = 0,\ \ F_y = F_z = W/2a$.

3. КОГЕРЕНТНОСТЬ, ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ. ДИФРАКЦИЯ

3.1. $\Delta x = \lambda L/\left(2d\right)$.

3.2. $I\left(x\right) = 4I_0 \cos^2\left(kxd/L\right)$, где I_0 — интенсивность в каждом из отверстий.

3.3. $n = 1 + \frac{\Delta x}{h}\frac{d}{L}$.

3.4. $I\left(x\right) = 4I_0 \sin^2 \frac{kxh}{L}$, где I_0 — интенсивность источника. *Указание*. Учесть потерю полуволны при отражении от зеркала.

3.5. $\lambda = 2\frac{\Delta x \cdot \Delta h}{L(\eta - 1)} \simeq 6 \cdot 10^3\,\mathring{A}$.

3.6. $x \le \frac{\lambda^2 L}{h \cdot \Delta\lambda}$, $l_\parallel \approx \frac{hx}{L} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$.

3.7. $h \le \lambda a/d$; $l_\perp \approx \lambda a/h \simeq \lambda/\alpha$, где α — угол, под которым видны источники из месторасположения экрана со щелями.

3.8. $V = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{kad}{2l}\right)\right|$. Высота щели h не влияет на видность полос.

3.9. $d/a \ge 4/3$. *Указание*. Учесть, что в интерференционной картине должны быть видны хотя бы несколько полос.

3.10. $V = \frac{2}{3}\cos^2 \frac{kLd\cos\alpha}{2a}$; $V_{\max} = 2/3$ при $\alpha = \pi/2$, т. е. когда стержень с источниками стоит параллельно экрану со щелями.

3.11. $d = \frac{am\lambda}{l}$, а также любые d, такие, что $d \ll \frac{a\lambda}{2\pi l}$.

3.12. $V = \left|\operatorname{sinc}\left(\frac{4\pi bl}{L\lambda}\right)\right|$, где $2l$ — размер источника, $2b$ — расстояние между щелями, L — расстояние от источника до экрана со щелями. *Указание*. Проинтегрировать распределение интенсивности

в заданном месте экрана по малым участкам источника, считая соседние участки некогерентными.

3.13. $L \geq \frac{bd}{\lambda} \simeq 1$ м.

3.14. $d \leq \frac{d_{\text{зрачка}} l}{L} \simeq 2$ см.

3.15. $V = \left| \operatorname{sinc}\left(\frac{k\alpha d}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{k\alpha_0 d}{2}\right) \right|$.

3.16. $\Delta x \simeq \frac{\left(\lambda^2/\Delta\lambda\right)^2 (a+b)}{4\alpha b(n-1)}$.

3.17. $l_{\|} \sim \frac{c}{\Delta\nu} \simeq 3 \cdot 10^8$ см; $l_{\perp} \simeq D$ у генератора и $l_1 \simeq l_{\|} \frac{\lambda}{D} \simeq 3 \cdot 10^3$см вдали от него.

3.18. а) $V = \left|\cos \frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right|$; б) $V = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda}{\alpha d} J_1\left(\frac{\pi\alpha d}{\lambda}\right)$, где J_1 — функция Бесселя.

3.19. а) $1,6 \cdot 10^6$ км; б) $6,2 \cdot 10^8$ км.

3.20. $L \geq af\alpha/\lambda = 20$ м.

3.21. $I(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \overline{I_1(\vec{r}_1, t)\, I_2(\vec{r}_2, t)} = \left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)^2 +$
$+2|A_1|^2 |A_2|^2 \cos\left[\left(\vec{k}_1 - \vec{k}_2\right)(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\right]$, где $I_i(\vec{r}_i, t)$ — интенсивность в точке наблюдения $\vec{r}_i$ в момент t, черта означает усреднение за время $\gg$ времени когерентности каждого источника. Угол между $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$ равен $\theta = 2\pi/(k\Delta r)$, где Δr — расстояние между точками наблюдения, при котором изменение $I(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ — максимально.

3.22. $V = 2\frac{\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}\gamma(\tau) = \gamma(\tau)$ при $I_1 = I_2$. Здесь I_i — интенсивность сигнала в i-м отверстии.

3.23. а) $\Gamma(\tau) = e^{i\omega t}(1 - |\tau|/T_0)$ для $|\tau| < T_0$ и $\Gamma(\tau) = 0$ для $|\tau| > T_0$;

б) $\Gamma(\tau) = e^{i\omega\tau} \frac{1}{N} \sum\limits_k N_k (1 - |\tau|/T_k)$,

где $N = \sum\limits_k N_k$ и в сумме учитываются слагаемые с $|\tau| < T_k$;

в) $\Gamma(\tau) = e^{i\omega\tau - |\tau|/\overline{T}}$;

г) $\Gamma(\tau) = e^{i\omega\tau} \cdot \left\{\frac{\overline{a}^2}{\overline{\overline{a^2}}} + \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0}\right)\left(1 - \frac{\overline{a}^2}{\overline{\overline{a^2}}}\right)\right\}$ для $|\tau| < T_0$; $\Gamma(\tau) = \frac{\overline{a}^2}{\overline{\overline{a^2}}} e^{i\omega t}$.

3.25. Комплексная степень когерентности равна

$$\Gamma(\tau) = e^{i\omega t}\left[c(\tau) + is(\tau)\right],$$

где $c(\tau) = (1/I_0)\int I(\omega - \overline{\omega})\cos(\omega - \overline{\omega})\tau \mathrm{d}\omega$ и
$s(\tau) = (1/I_0)\int I(\omega - \overline{\omega})\sin(\omega - \overline{\omega})\tau \mathrm{d}\omega$;
$I_0 = \int I(\omega - \overline{\omega})\, d\omega$ — интенсивность пучка.
Степень когерентности равна $\gamma(\tau) = \sqrt{c^2(\tau) + s^2(\tau)} = |\Gamma(\tau)|$.

3.26. Результирующая волна линейно поляризована. Ее плоскость поляризации медленно вращается с частотой $\Delta\omega$ в сторону исходной волны с большей частотой.

3.27. $\gamma(\tau) = exp\left\{-(\tau/\tau_0)^2\right\}$, где $\tau_0 = 2c/(\overline{\omega}\,\overline{v}_T)$; здесь $\overline{\omega}$ — центральная частота линии, $\overline{v}_T$ — тепловая скорость атомов.

3.28. $\gamma(\tau) = |\mathrm{sinc}(4\pi bl/(\lambda L))|$, где $2b$ — размер источника, $2l$, L — параметры схемы Юнга. *Указание*. Использовать решение задач 3.12 и 3.22.

3.29. $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}, \tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty I(\omega)(1 + \cos\omega\tau)\mathrm{d}\omega$.

3.30. $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}, \tau) = I\frac{\sin\Delta\omega\tau}{2\pi\tau}\cos\omega_0\tau$.

3.31. а) и б) $\Gamma(\tau) = a^2(1 - \tau/T_0)$. *Указание*. $\Gamma(\tau)$ связана со спектром мощности $G(\omega)$ соотношениями
$\Gamma(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty G(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\omega$ и $G(\omega) = \int\limits_0^\infty \Gamma(\omega)\cos\omega\tau\mathrm{d}\tau$.

3.32. а) $G(\omega) = \frac{T_0}{2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)$;

б) $G(\omega) = \frac{1}{2N}\sum\limits_k T_k\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{\omega T_k}{2}\right)$, где $N = \sum\limits_k N_k$;

в) $G(\omega) = \frac{\overline{T}}{1+\omega^2\overline{T}^2}$;

г) $G(\omega) = T_0 \left(1 - \frac{\overline{a}^2}{a^2}\right) \left(-\operatorname{sinc}(\omega T_0) + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}^2\left(\frac{\omega T_0}{2}\right)\right) + \frac{T_0}{2}$.

3.33. Минимумы при $2d\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = (m - 1/2)\lambda$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$

3.34. $I_{\text{прош}} = \frac{(1-R)^2}{1-2R\cos(\pi m)+R^2}$, $I_{\text{отр}} = \frac{2R(1-\cos(\pi m))}{1-2R\cos(\pi m)+R^2}$, где m — порядок интерференции, $\sqrt{R}$ — коэффициент отражения для амплитуды. *Указание*. Просуммировать соответственно отраженные и проходящие пучки с учетом изменения амплитуды и фазы каждого из них при прохождении и преломлении на границе воздух-стекло. Учесть потерю полуволны при однократном отражении от поверхности пластинки.

3.35. См.ответ к задаче 1.20.

3.36. а) $\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}$; б) $\Delta x \simeq \frac{\lambda}{2n\alpha}$.

3.37. а) $r_m \simeq \sqrt{\lambda R m}$; б) Картина в проходящем свете будет дополнительной по отношению к картине в отраженном свете.

3.38. $r_* \simeq \sqrt{R\lambda^2/\Delta\lambda}$.

3.39. $h(n-1) > \lambda/2$, где h — размер неровностей стекла. *Указание*. Найти разность хода при прохождении света через неровности стекла.

3.40. а) $N \simeq (L/d)^2 \simeq 2500$; б) $\Delta\lambda/\lambda \simeq 1/N = 4 \cdot 10^{-4}$.

3.41. а) $\Delta x \simeq F\lambda/2h$; б) $d \leq 2h^2/m^2\lambda$, где m — порядок интерференции.

3.42. а) Полосы отсутствуют; б) $\Delta x \simeq \lambda/2\alpha$.

3.43. а) $I = 4I_0\cos^2\left(\frac{\pi\omega_0\Delta}{c}\right)$; б) $I = 4I_0\left(1 + \cos\frac{2\pi\omega_0\Delta}{c}\cos\frac{\pi\delta\omega\Delta}{c}\right)$, где $\omega_{1,2} = \omega_0 \pm \frac{\delta\omega}{2}$; в) $I = I_0\cos\frac{2\pi\omega_0\Delta}{c}\exp\left[-\left(\frac{\pi\delta\omega\Delta}{c}\right)^2\right]$. Всюду $\Delta = vt$, где v — скорость зеркала.

3.44. а) $m\lambda = 2h\cos\varphi$, где φ — угол между выходящими лучом и нормалью к пластинке, т. е. с ростом m полосы стягиваются к центру; б) $\Delta\varphi = \lambda/\left(2h\sin\varphi\right)$, т. е. ширина полос возрастает при увеличении λ, порядка интерференции и уменьшается с ростом h.

3.45. Радиусы колец увеличиваются в отношении $\mathrm{tg}\varphi/\mathrm{tg}\psi$, где $\sin\varphi/\sin\psi = n$. *Указание*. Учесть преломление при выходе из стекла.

3.46. $I_{\text{вых}}(x) = 1/(1 + 4\frac{\rho^2}{\tau^2}\sin^2\frac{2\pi a x}{\lambda^2})$, где $|x| \leq \Delta\lambda$, $I(\lambda) = 1$, $I(\lambda + \Delta\lambda) = 0,1436$.

3.47. $d_{\min} = \frac{\lambda_0}{2n} \simeq 2,1\cdot 10^{-5}$ см. При падении под углом θ $d_{\min} = \frac{\lambda}{2n\cos\theta}$, т. е. $d_{\min}$ возрастает.

3.48. $\Delta x = \frac{f\lambda}{h\alpha}\cdot\frac{2\left(n^2-\sin^2\varphi\right)^{3/2}}{4\cos2\varphi\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}+\sin^2 2\varphi}$; $\alpha \simeq \frac{2f\lambda\left(n^2-\sin^2\varphi\right)^{3/2}}{h\Delta x} \simeq 1'$.

3.49. а) $m\lambda = h\cdot 2\left(n^2 - \cos^2\varphi\right)^{1/2}$, где φ — угол между выходящим лучом и поверхностью пластинки; т. е. с ростом m полосы удаляются от пластинки; б) $\Delta\varphi = \lambda\sqrt{n^2-1}/\left(2hn\right)$, т. е. ширина полосы растет с длиной волны и уменьшается при возрастании порядка интерференции и толщины пластинки.

3.50. Картина сместится на половину полосы

3.51. а) Возможны оба варианта; б) и г) равного наклона; в) равной толщины.

3.52. $\Delta = \lambda/2\alpha = 0,42$ мм.

3.53. $r_m = \sqrt{m\frac{ab}{a+b}\lambda}$; для плоской волны $r_m = \sqrt{m\lambda b}$.

3.54. Если E — амплитуда в B при полностью открытом фронте, то а) $E_1 \simeq 2E$; б) $E_n^* \simeq \sum\limits_{i=1}^{n} E_{2i-1} > E_1$, где n — число открытых нечетных зон; в) $E_n \simeq \sum\limits_{i=1}^{n} E_1 \simeq 2E_n^*$, где n — число открытых зон.

3.55. $f = r_m^2/(\lambda m) = \frac{ab}{a+b} = 90$ см. При $n > 1$ фокусное расстояние пластинки возрастет.

3.56. а) $I \simeq 4I_0$; б) $I \simeq I_0$.

3.57. $f = \frac{\lambda_0 k^2 R_1 R_2}{2\lambda(R_1+R_2)}$.

3.58. $y' = fy/d$. Шар можно заменить диском при $y < \frac{d}{R}\sqrt{\frac{\lambda f d}{f+d}}$, где $y(y')$ — расстояние от источника (его изображения) до оси системы.

3.60. Указание: разбить границу на плоские зоны, перпендикулярные к плоскости падения; ширину зоны выбрать так, чтобы волны, отраженные (преломленные) правой и левой половинами каждой зоны, взаимно уничтожались.

3.62. $\cos\theta = v_{\text{фаз}}/v$. Свет регистрируется при $v > v_{\text{фаз}} = \frac{c}{n}$.

3.63. $I(z) \simeq I_0 \frac{z_0^2}{\left(\sqrt{a^2+z^2}+\sqrt{a^2+z_0^2}\right)^2}$, где z_0 (z) — расстояние от экрана до источника (точки наблюдения). При $z = z_0$ (симметричная точка) $I \simeq 0,25I_0$.

3.64. $I(z) = I_0 \left(\frac{2z_0}{z+z_0}\right)^2 \cdot \sin^2 \frac{ka^2(z+z_0)}{4zz_0}$ (в обозначениях предыдущей задачи). При $z_0 \to \infty$ $I = 4I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{4z} \simeq I_0 \left(\frac{ka^2}{2z}\right)^2$.

3.65. $r_{\min} \simeq \sqrt{\lambda l/2}$, при этом $I \simeq 4I_0$.

3.66. $d_{\min} \simeq \sqrt{\lambda l}$.

3.67. $r_{\min} \simeq \sqrt{a\lambda/6}$; $R \simeq \sqrt{a\lambda(n \pm 1/3)}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (для $n = 0$ только знак «+»).

3.68. $x \simeq \frac{b\lambda}{d}$ при $\frac{1}{2b^2}\left(\frac{b^2\lambda^2}{d^2} + \frac{d^2}{4}\right) \ll 1$. Смещение источника несущественно при $d^2/8a \ll 1$.

3.69. $I(r) \simeq I_0 \frac{a^4}{a^4+(z/k)^2} \exp\left(-\frac{r^2}{a'^2}\right)$, где $a'^2 = a^2 + (z/ka)^2$. *Указание*. Распределение амплитуд на плоском волновом фронте имеет

вид $f\left(r\right)=\sqrt{I_0}\exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)$.

3.70. $\varphi\simeq\sqrt{\lambda/L}\simeq 0,0075''$; $h\leq\sqrt{\lambda L}\simeq 14$ м.

3.71. $d^2/\left(\lambda r\right)\ll 1$.

3.72. а) $I\left(\varphi\right)\simeq I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bk\sin\varphi}{2}\right)\simeq I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bk\varphi}{2}\right)$, где φ — угол дифракции; б) $I\left(\varphi\right)=4I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bk\varphi}{2}\right)\cos^2\frac{ka\varphi}{2}$.

3.73. $I\left(\varphi\right)=I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bk\varphi}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2$, $\beta\simeq\frac{k\varphi d}{2}$.

3.75. $I(\varphi)=I_0=\mathrm{sinc}^2\left(\frac{bkp}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{Nkpd}{2}\Big/\sin\frac{kpd}{2}\right)^2$,
где $p=\sin\varphi-\sin\alpha$. Максимальное излучение проходит под углом $\varphi=\alpha$.

3.76. $I\left(\varphi\right)=I_0\,\mathrm{sinc}^2\left(\frac{kpd}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{Nkp_1d}{2}\Big/\sin\frac{kp_1d}{2}\right)^2$,
где $p_1=\sin\left(\varphi-\alpha\right)-\sin\left(\alpha+\theta\right)$, $p=\sin\varphi-\sin\alpha$.

$$\Delta\lambda\simeq\lambda^2\big/[2d\cdot\sin\left(\theta+2\alpha\right)].$$

Главный максимум интенсивности наблюдается в порядке $m=2\alpha d/\lambda$ под углом дифракции $\varphi\simeq\theta+2\alpha$.

3.77. $\theta_{\max}=\varepsilon\left(n-1\right)$, $m=\left(a/\lambda\right)\varepsilon\left(n-1\right)$, где n — показатель преломления материала решетки.

3.78. $\sin\theta_{\max}=\sqrt{1-\left(\lambda/2a\right)^2}$.

3.79. $I=\frac{I_0}{\left(1-e^{-\alpha}\right)^2+4e^{-\alpha}\sin^2\frac{\Delta}{2}}$, где $\alpha=\delta/d$ — затухание волны на периоде решетки, $\Delta=k_zd-kd\sin\theta$. Здесь $k_z=\sqrt{k^2-\left(\pi/a\right)^2}$ для волны H_{10}; $k=\omega/c$. В излучении эффективно участвует $N\simeq d/\delta$ щелей.

3.80. $I=I_0\frac{k^2}{k^2+1-2k\cos(\alpha+\beta)}=\frac{I_0}{5/4+\cos\beta}$, $\beta=\frac{\pi d\sin\theta}{\lambda}$.

3.81. $I\left(z\right)=I_0\cdot 4\sin^2\frac{ka^2}{4z}$. Темно при $z=\frac{a^2}{2m\lambda}$ $\left(m=1,2,...\right)$.

3.82. $I(\theta) = 2I_0 \operatorname{sinc}^2 \beta \cdot (\sin N\beta/\sin\beta)^2$, где $\beta = ak\varphi/2$.

3.83. $I(\varphi,\psi) = I_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{ka\sin\varphi}{2} \cdot \operatorname{sinc}^2 \frac{kb\sin\psi}{2}$.

3.84. $I(\theta) \sim \frac{I_0}{\theta^2}\left[aJ_1(ka\theta) - bJ_1(kb\theta)\right]^2$, где $a(b)$ — внешний (внутренний) радиусы кольца, $J_1(x)$ — функция Бесселя. *Указание*. Воспользоваться разложением $e^{ia\cos x} = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(a)\, e^{inx}$.

3.85. $\frac{dI(\theta)}{d\Omega} \sim I_0 \frac{J_1^2\left(ka\theta\sqrt{1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha'}\right)}{\theta^2\left(1-\sin^2\alpha\cos^2\alpha'\right)}$, θ — угол дифракции, а α' — угол между вектором $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}'$ и плоскостью падения, ($\vec{k}$ $\left(\vec{k}'\right)$ — волновой вектор падающего (дифрагированного) пучка), α — угол падения.

3.86. $\Delta x_{\text{разр}} \simeq \frac{\lambda}{D}h \simeq 5$ см, где D — диаметр зрачка, а h — высота полета.

3.87. Люди с острым зрением видят на небе Венеру как «кружок».

3.88. Будут, так как для двух точек разрешимый по Рэлею максимум освещенности превосходит минимум на $\simeq 20\ \%$.

3.89. а) Не будут. б) Будут в) Будут. *Указание*. учесть, что несамосветящиеся точки освещаются одним и тем же источником и, следовательно, исходящие от них волны когерентны.

3.90. а) 30"; б) 0,04 мм.

3.91. а) На Луне $\simeq 40$ м; б) На Солнце $\simeq 20$ км.

3.92. $\lambda/\Delta\lambda = 2mN$. Для решетки из поляроидов (см. задачу 3.82) $\lambda/\Delta\lambda = mN$.

3.93. $m \gtrsim 1\Big/\left(\ln\sqrt{\frac{2T}{AMc^2}}\right) \sim 1$, где AM — масса атома Ar.

3.94. $\tau < \pi L/\sqrt{2T/M} \simeq 0,2$ года, где M — масса атома водорода; $N \geq \frac{1}{2m\Delta\lambda/\lambda} \simeq \frac{c}{2m\sqrt{2T/M}} \simeq 7\cdot 10^3$.

3.95. а) $\Delta\theta \simeq \lambda/(4h\cos\theta)$. б) Схема дает выигрыш при $h > D/4$. в) $h_{\max} \simeq \lambda D/(4\Delta\lambda)$. г) $\theta_0 \simeq \lambda/4h$.

3.96. $\varphi \simeq \sqrt{\lambda/D} \simeq 2'$ при $\lambda \simeq 1$ м; $h \ll h_{\max} \simeq \sqrt{\lambda\, D} \simeq 2$ км для $\lambda \simeq 1$ м.

3.97. $\varphi \simeq \lambda/D \simeq 0,06''$ при $\lambda \simeq 1$ м; $h \ll \frac{b\lambda}{D} \simeq h_{\max}$, где b — диаметр зеркала телескопа. $h_{\max} \simeq 10$ м для $\lambda \simeq 1$ м и $b \simeq 100$ м.

3.98. Дифракцию следует учитывать при $\lambda \simeq \frac{d^2}{L}$: $I \simeq I_0$ при $\lambda \ll d^2/L$, $I = 4I_0\sin^2\left(\pi d^2/2L\lambda\right)$ при $\lambda \simeq d^2/L$, $I \simeq I_0\left(\frac{\pi d^2}{2L\lambda}\right)^2$ при $\lambda \gg \frac{d^2}{L}$.

3.99. $I(\theta) \simeq I_0\frac{\cos^2(\pi a\theta/\lambda)}{\left(1/4-a^2\theta^2/\lambda^2\right)^2}$.

3.100. $I_\varphi = I_0\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^2\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{sinc}^2\frac{b(k\varphi-n\omega_0)}{2}$, где J_n — функция Бесселя. *Указание*. Функцию пропускания решетки $T(x)$ взять в виде $T(x) = \exp\left[im\sin(\omega_0 x)/2\right]$. Решетка помещена в щель шириной b; воспользоваться также разложением для $\exp(ia\sin\omega_0 x)$, приведенном в указании к задаче 3.84.

3.101. $h = \lambda(2m-1)/2(n-1)$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$ Интенсивность нулевого главного максимума равна нулю.

3.102. $I = 4I_0\left(\frac{a}{\theta_0 F}\right)^2 \simeq 900$ Вт/см^2. Уменьшится в $\left(\frac{l}{l_\odot}\frac{\lambda}{2\theta_0 a}\right)^2 \simeq 4\cdot 10^5$, где $l_\odot$ — расстояние от Земли до Солнца.

3.103. а) $d \simeq \frac{\lambda F}{d_1}$; б) $I_F = I_0\left(\frac{d_1}{d}\right)^2$; в) $p = \frac{4}{\pi}\frac{W/c}{d^2} \simeq 4\cdot 10^6$ атм для $\lambda \simeq 5\cdot 10^{-5}$ см, $F = 5$ см и $S = \pi d_1^2 \simeq 1$ см^2.

3.104. $I_2 \simeq I_1\left(\frac{d}{l}\right)^2\left(\frac{1+l\lambda/d^2}{d_\odot+\lambda/d}\right)^2 \simeq I_1\left(\frac{d}{\alpha_\odot l}\right)^2$.

3.105. $I_n \simeq I_0\left(\frac{d}{\alpha_\odot f}\right)^2 \simeq 1600\, I_0$.

3.106. $I(\theta) \sim NI_0 J_1^2(ka\theta) / \left(k^2 a^2 \theta^2\right)$, где I_0 — интенсивность падающего света; a — радиус малых экранов; N — их количество. *Указание*. Учесть, что пучки, дифрагировавие на разных экранах, некогерентны.

3.107. $\Delta\varphi = k(n-1)x\alpha$, где x — координата, отсчитываемая от преломляющего ребра перпендикулярно ему.

3.108. $f = L^2/(n_0 d)$.

3.109. $\Delta\varphi = \pm\frac{\pi x^2}{\lambda f} = \pm kx^2/(2f)$, где f — фокусное расстояние линзы: $f^{-1} = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$; знак «+» («−») для рассеивающей (фокусирующей) линзы.

3.110. Указание: использовать результат предыдущей задачи.

3.112. В плоскости изображения $I(\alpha) = I_0 \frac{J_1^2(\alpha D/\lambda)}{\alpha^2}$, где I_0 — интенсивность в апертуре линзы; D — ее диаметр; J_1 — функция Бесселя. *Указание*. Воспользоваться при вычислениях разложением из задачи 3.84.

3.113. $R = \sqrt{\frac{ma\lambda f}{|a-f|}}$: светлые при нечетном и темный при четном m.

3.114. а) $I(x) = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0 A(x)\cos\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)$, где $A_0\,(A(x))$ — амплитуда опорной плоской (предметной сферической) волны, $\beta = k\alpha(n-1)$; б) $I(x) = A_0^2 + A^2 + 2A_0 A\cos k\theta x$, где $A_0(A)$ — амплитуда опорной плоской (предметной плоской) волны, θ — угол между опорной и предметной волнами.

3.115. а) Поле за голограммой:

$$U(x) \simeq \left(A_0^2 + A^2\right)e^{ikz} + A_0 A e^{ikz} \cdot e^{i\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)} + A_0 A e^{ikz} \cdot e^{-i\left(\beta x + \frac{kx^2}{2f}\right)};$$

первый член описывает плоский неотклоненный пучок, второй (третий) действует как комбинация призмы, отклоняющей вверх (вниз), и рассеивающей (собирающей) линзы с фокусным расстоянием f, т. е.

описывает изображение предмета; б) Поле за голограммой

$$U(x) = A_0 a e^{ikz} + A_0 e^{i(kz+\theta x)} + A_0 b e^{i(kz-\theta x)},$$

где $a = A_0^2 + \frac{\gamma}{2}A^2$, $b = 2\gamma A_0 A$; первый член описывает неотклоненный центральный пучок, а второй (третий) — пучок первого порядка, отклоненный на $\theta\,(-\theta)$.

3.116. $U(x) = A_0^2 + A^2\left(1 + \cos\frac{2kx\delta}{f}\right) +$

$$+A_0 A e^{i\beta x}\left[e^{\frac{ik(x-\delta)^2}{2f}} + e^{\frac{ik(x+\delta)^2}{2f}}\right] + A_0 A e^{-i\beta x}\left[e^{\frac{-ik(x-\delta)^2}{2f}} + e^{\frac{-ik(x+\delta)^2}{2f}}\right].$$

3.117. $l' = lf/(l+f)$; увеличение равно l'/l.

3.118. В ответе предыдущей задачи нужно сменить знак f.

3.119. См. ответ к задаче 3.117.

3.120. $R \le \lambda l/\delta$. Координаты центра пластинки: $x=0, y=l\sin\theta$. $I(x,y) = I_0 + \alpha\sqrt{I_0}\cos^2\left(\frac{kR^2}{2l} + \varphi\right)$, $\varphi = kl - ky\sin\theta$ и $R^2 = x^2 + (y - l\sin\theta)^2 - l^2\sin^2\theta$.

3.121. *Указание*. Опорное и «предметное» отверстия можно рассматривать как интерференционную схему Юнга.

3.122. Изображение будет сфокусировано на расстоянии $1/(2\cdot\varkappa)$ от голограммы.

3.123. Разрешающая способность голограммы Френеля ограничена зернистостью фотоэмульсии, а голограмма Фурье — полным размером голограммы.

3.124. а) Голограмму следует освещать пучком, падающим под углом α (угол падения опорного пучка); при этом восстанавливается полное мнимое изображение «предмета». б) При освещении голограммы пучком под углом β_i (один из «предметных» пучков) восстанавливается лишь часть действительного изображения предмета. *Указание*. Учесть, что голограмма Денисюка представляет собой систему

зеркальных слоев серебра фотоэмульсии, расстояние между которыми равно $d_i = \lambda / \left[2\sin\left(\frac{\alpha+\beta_i}{2}\right)\right]$ для каждого из «предметных» пучков.

3.125. Восстанавливается цветное изображение предмета.

3.126. а) $T(x) \sim J_0^2(k\alpha a)$, где $\alpha = x/l \ll 1$, l — расстояние до голограммы, J_0 — функция Бесселя. *Указание*. Записать «предметную» плоскую волну, отражающуюся от объекта в момент времени t.

3.127. $T(x) \sim g^2 + a_0 g e^{ik\theta x} + a_0 g^* e^{-ik\theta x}$, где $g(x)$ — Фурье-образ функции пропускания предмета G_0; a_0 — амплитуда опорной волны; θ — угол преломления одного пучка призмой.

3.128. В плоскости M под соответствующим углом наблюдается изображение транспаранта T; на месте фрагмента G наблюдается светящаяся «точка», размер которой близок к размеру фрагмента. *Указание*. Разделить функцию пропускания из предыдущей задачи на искомый фрагмент и остальную часть.

3.129. $F(k) \sim T_0 \delta(k) + \frac{\tau}{2}\left[\delta(k+\varkappa) + \delta(k-\varkappa)\right]$, т. е. после фильтра имеется неотклоненный пучок к два пучка, идущих под углами $\pm\varkappa\lambda/(2\pi)$ к оси системы.

3.130. Экран равномерно освещен.

3.131. $d < \lambda f/(\pi a)$, где a — характерный размер изображения снежинки на фотографии, $\Delta x_{\min} \gtrsim a$. *Указание*. Изображение снега на фотографии в плоскости экрана $Э_1$ описывается пространственной частотой $\varkappa \sim 1/a$.

3.132. $\frac{1}{a} - \frac{\pi d}{\lambda f} < \varkappa_1 < \frac{1}{a} + \frac{\pi d}{\lambda f}$, $\Delta x_{\min} \approx \frac{1}{|\varkappa_1 - 1/a|} < a$. *Указание*. Фильтр $Т_1$ в плоскости экрана $Э_1$ преобразует спектр пространственных частот: $\varkappa \to \pm(\varkappa \pm \varkappa_1)$, где $\varkappa$ — пространственная частота снега.

3.133. Если $d \lesssim \lambda f/(\pi a)$, то изображение нитей, параллельных щели, исчезнет.

4. ДИПОЛЬНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

4.4. а) $\vec{E}_e = \left\{2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr}\right)\cos\theta \cdot Z_e, \left(\frac{1}{r^2} + \frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\sin\theta \cdot Z_e, 0\right\}$,

$$\vec{H}_e = \left\{0, 0, \left(\frac{i\omega}{cr} - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\sin\theta \cdot Z_e\right\};$$

б) $\vec{H}_m = \vec{E}_e$, $\vec{E}_m = -\vec{H}_e$.

4.5. $\vec{E}_e = \left\{\frac{2p\cos\theta}{r^3}, -\frac{p\sin\theta}{r^3}, 0\right\} = -\frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$;

$$\vec{H}_e = \left\{0, 0, \frac{i\omega p}{cr^2}\sin\theta\right\} = \frac{\sin\theta}{cr^3}\frac{\partial\vec{p}}{\partial t} = \frac{J}{c}\frac{\left[\vec{r}\times d\vec{l}\right]}{r^3}.$$

4.6. $\vec{E}_e = \left\{0, -\frac{\sin\theta}{r}\frac{\omega^2}{c^2}e^{i(\omega t - kr)}, 0\right\}$, $\vec{H}_e = \left\{0, 0, -\frac{\sin\theta}{r}\frac{\omega^2}{c^2}e^{i(\omega t - kr)}\right\}$; $\vec{E}_e \perp \vec{H}_e$.

4.7. а) $\frac{dI}{d\theta} = \frac{\sin^3\theta}{c^3}|\vec{p}(t - r/c)|^2$.

б) $I = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2}{3}\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{c^3}$.

4.8. $\vec{E} = \left(-\frac{e\vec{r}}{r^3} + \frac{3e\vec{r}(\vec{r}\vec{v})}{cr^4} - \frac{e\vec{v}}{cr^2} + \frac{e\left[\vec{r}\times\left[\vec{r}\times\dot{\vec{v}}\right]\right]}{c^2r^3}\right)\Big|_{t'=t-r/c}$

$\vec{H} = \left(\frac{e[\vec{v}\times\vec{r}]}{cr^3} + \frac{e\left[\dot{\vec{v}}\times\vec{r}\right]}{c^2r^2}\right)\Big|_{t'=t-r/c}$.

Граница между квазистационарной (ближней) и волновой зонами определяется из $\frac{e}{r_{\text{гр}}^2} \simeq \frac{e\dot{v}}{c^2 r_{\text{гр}}}$.

4.9. $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\dot{\vec{v}} \times \vec{n}\right]^2$, где $\vec{n}$ — орт в направлении излучения. $I = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{\vec{v}}^{\,2}$.

4.11. *Указание*. Воспользоваться тем, что на поверхности шара $E_\theta|_{r=R} = 0$.

4.12. $\tau = \frac{2\pi}{c}\sqrt{LC} \simeq \frac{2\pi}{c}\sqrt{l\ln\frac{l}{d}\cdot\frac{rR}{r+R}} \simeq 10^{-10}$ с.

4.14. а) $p = p_0 e^{-\frac{ct}{2R}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{ct}{R} - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{ct}{R} \right)$;

б) $E_r(r,t) = \frac{2}{r^2} \left[p(\tau)/r + \dot{p}(\tau)/c \right] \cos\theta$,

$E_\theta(r,t) = \frac{1}{r} \left[\frac{p(\tau)}{r^2} + \frac{\dot{p}(\tau)}{cr} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{c^2} \right] \sin\theta$,

$H_\varphi(r,t) = \frac{1}{r} \left[\frac{\dot{p}(\tau)}{cr} + \frac{\ddot{p}(\tau)}{c^2} \right] \sin\theta$ для $R \le r \le R + ct;\ \ \tau \equiv t - \frac{r}{c}$.

4.15. а) $\mathcal{E} = \frac{9}{4} \left(\frac{v_0}{c} \right)^3 H_0^2 R_0^3 \simeq 2,5 \cdot 10^{-4}$ эрг;

б) $E = \frac{1}{cr} \left(\frac{\dot{m}}{r} + \frac{\ddot{m}}{c} \right) \sin\theta$, $m = m_0 e^{-\alpha t}$ — магнитный момент сферы, $m_0 = -\frac{1}{2} H_0 R_0^3$, $\alpha = \frac{v_0}{R_0}$; $E_{\max} \simeq \frac{1}{2} H_0 R_0^3 \frac{v_0/c}{r^2 R_0} \simeq 1,5 \cdot 10^{-2}$ В/см.

4.16. $I = \frac{8}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3} \left(\frac{k}{m} - \frac{q^2}{2mh^3} \right)^2$, где a — амплитуда малых колебаний. *Указание*. Рассмотреть движение заряженного тела под действием притяжения со стороны изображения и возвращающей силы упругости пружины.

4.17. $\overline{I} = E^2 R^4 a^2 \omega^4 / 48 c^3$.

4.18. $\vec{H}(\vec{r},t) = \frac{ea\omega^2}{c^2 r} \left[\cos\theta \cos\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\alpha + \sin\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{e}_\theta \right]$,

$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 \omega^4}{8\pi c^3} \left(1 + \cos^2\theta \right)$, $\overline{I} = \frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 \omega^4}{c^3}$. Излучение в верхней (нижней) полусфере влево (вправо) эллиптически поляризовано; в экваториальном плоскости поляризация линейная; при $\theta = 0(\pi)$ поляризация круговая левая (правая).

4.19. $\tau = m^2 c^3 a_0^3 / \left(4e^4 \right)$. Для «атома водорода» $\tau \simeq 1,3 \cdot 10^{-11}$ с.

4.20. а) $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \left(\frac{r_e}{a} \right)^{3/2} \simeq 5 \cdot 10^{-7}$. б) $mN \simeq \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, $m \simeq 2$ для $N \simeq 10^6$.

4.21. $\overline{I} = \frac{8\pi}{3} \frac{\pi \alpha^2 a^2 J^4}{c^3 Q^2}$; $E \simeq \frac{Q}{r^2}$.

4.22. При $\omega_0 >> \frac{eH}{2mc} \equiv \omega_L$

$$\vec{r} = A_1 e^{-i\omega_0 t} \cdot \vec{e}_z + A_2 e^{-i(\omega_0 - \omega_L)t} \cdot (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) + A_3 e^{-i(\omega_0 + \omega_L)t} \left(\vec{e}_x - i\vec{e}_y \right).$$

Излучение происходит на частотах ω_0 и $\omega_0 \pm \omega_L$ и на этих частотах, вообще говоря, эллиптически поляризовано; вдоль поля $\vec{H}$ наблюда-

ются две боковые линии, поляризованные по кругу, а поперек поля — все три компоненты, поляризованные линейно.

4.23. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{p_0^2\Omega^4}{8\pi c^3}\left(1+\cos^2\theta\right), \overline{I} = \frac{2}{3}\frac{p_0^2\Omega^4}{c^3}$.

4.24. $\vec{H} = \frac{m\omega^2\sin\varphi}{c^2 r}\left(\cos\theta\vec{e}_\theta + i\vec{e}_\alpha\right)e^{-i(\omega t-kr-\alpha)}$,

$$\vec{E} = \frac{m\omega^2\sin\varphi}{c^2 r}\left(-\cos\theta\vec{e}_\alpha + i\vec{e}_\theta\right)e^{-i(\omega t-kr-\alpha)},\ \ \vec{m} = \frac{4}{3}\pi a^3\vec{M}.$$

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{m^2\omega^4\sin^2\varphi}{8\pi c^3}\left(1+\cos^2\theta\right),\ \ \overline{I} = \frac{2}{3}\frac{m^2\omega^4\sin^2\varphi}{c^3}.$$

4.25. $\mathcal{E} = \frac{2}{3}\left(\frac{|Qe|/R}{mc^2}\right)^{3/2}\frac{e^2}{R}\left\{(k+1)\arcsin\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \sqrt{k}\right\}, k = \frac{2\mathcal{E}_0 R}{|Qe|}$.

4.26. $\mathcal{E} = \frac{8}{3}\frac{Q^2}{c^3}\sqrt{d_0-d}\left(\frac{2\pi Q^2}{MS}\right)^{3/2}$.

4.28. $\overline{I} = \frac{(2E)^{3/2}|q_1q_2|^3\mu^{5/2}}{3M^5c^3}\left(\frac{q_1}{m_1}-\frac{q_2}{m_2}\right)^2\left(3-\frac{2|E|M^2}{\mu q_1^2q_2^2}\right)$, где $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ — приведенная масса, $M = \mu r^2\dot{\varphi} = \mathrm{const}$ и E — инварианты кеплеровского движения зарядов. *Указание.* Рассмотреть соответствующую кеплеровскую задачу об относительном движении зарядов. При $q_1/m_1 = q_2/m_2$ получаем ответ на задачу 4.27.

4.29. $\varepsilon = \frac{8\mu^3v_0^5}{45c^3|q_1q_2|}\left(\frac{q_1}{m_1}-\frac{q_2}{m_2}\right)^2$.

4.30. $-\frac{d^2\mathcal{E}}{dt'd\Omega} = \left(1-\frac{\vec{n}\vec{v}}{c}\right)\frac{dI}{d\Omega}$.

4.31. $\mathcal{E} \simeq \frac{\pi}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3\rho^3v}$; $\frac{Ze^2}{\rho mv^2} \ll 1$. *Указание.* Считать, что траектория электрона не искривляется ядром (ρ — прицельный параметр). (В оценке $\pi/3 \sim 1$).

4.32. $\frac{dI}{d\Omega} \simeq \frac{e_1^2e_2^2}{32c^3\rho^3v}\left(\frac{e_1}{m_1}-\frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(4-\sin^2\theta\cos^2\alpha-3\sin^2\theta\sin^2\alpha\right)$.

4.33. $\frac{d\Delta W\omega}{d\omega} \simeq \frac{8q_1^4q_2^2}{3\pi c^3m^2\rho^2v^2}$. *Указание.* То же, что и к задаче 4.31.

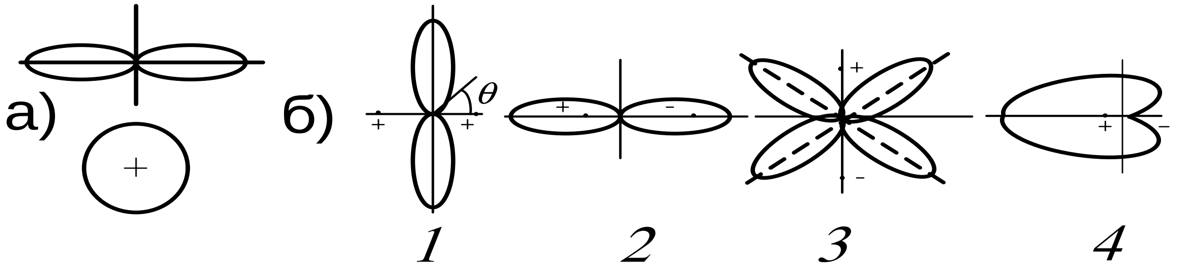
4.34. $\mathcal{E} \simeq \frac{\pi e^6R^2}{4c^2m^2\rho^5v}$. *Указание.* Учесть силу взаимодействия электрона с его изображением в шаре и считать, что траектория при этом не искривляется. (В оценке $\pi/4 \sim 1$.)

4.35. $\mathcal{E}=\frac{2}{3}\frac{e^4E^2}{m^2c^3}\frac{L}{\sqrt{2\mathcal{E}/m}}$.

4.36. $\Delta\mathcal{E}_{\text{внутр}}=\frac{2}{3}\frac{e^3U\sqrt{2mT}}{m^2c^3d}\left(\sqrt{1+\frac{eU}{T}}-1\right)\simeq 1,3\cdot 10^{-16}$ эВ; $\Delta\mathcal{E}_{\text{внеш}}\simeq (d/\alpha)\cdot\Delta\mathcal{E}_{\text{внутр}}$.

4.37. $R\simeq 72$ Ом.

4.38.



В экваториальной плоскости $I(\theta)\sim\cos^2\left(\frac{\Delta}{2}+\frac{\pi d}{l}\cos\theta\right)$, где Δ — сдвиг фаз между диполями, а l — расстояние между ними.

4.39. $l=(2m+1)\,\lambda/4$, где $m=0,1,2,\ldots$.

4.40. $H_\theta=\frac{\omega^2p_0}{c^2r}[\sin\alpha+i\sin(\alpha-\varphi)]e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$
$H_\alpha=\frac{\omega^2p_0}{c^2r}\left[\cos\alpha+i\cos(\alpha-\varphi)\right]\cos\theta e^{-i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}$, где ось X направлена вдоль диполя, опережающего другой по фазе; плоскость XY совпадает с плоскостью обоих диполей.

$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{\omega^4p_0^2}{8\pi c^3}\left\{2-\left[\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha-\varphi)\right]\sin^2\theta\right\}$, $\overline{I}=\frac{2}{3}\frac{p_0^2\omega^4}{c^3}$. Поляризация, вообще говоря, эллиптическая. Поляризация круговая в направлениях, определяемых уравнением $|\cos\theta|=\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$ при $\alpha=\frac{\varphi}{2}$ или $\alpha=\frac{\varphi}{2}+\pi$ и $|\cos\theta|=c\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$ при $\alpha=\frac{\varphi}{2}\pm\frac{\pi}{2}$.

4.41. $\vec{H}=-\frac{4ea^2\omega^3}{c^3r}\left[\cos 2(\omega t'-\alpha)\,\vec{e}_\theta+\cos\theta\sin 2(\omega t'-\alpha)\,\vec{e}_\alpha\right]\sin\theta$,

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{2e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}\sin^2\theta\left(1+\cos^2\theta\right),\ \overline{I}=\frac{32}{5}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5},\ \ (t'=t-\frac{r}{c}).$$

Указание. Учесть, что дипольный электрический и магнитный моменты равны нулю; использовать результаты задачи 4.18.

4.42. $\vec{H}=\frac{p_0a\omega^3}{c^3r}\sin\theta\cos\theta\sin(\omega t-kr)\,\vec{e}_\alpha$; $\frac{dI}{d\Omega}=\frac{p_0^2a^2\omega^6}{8\pi c^5}\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\overline{I}=p_0^2a^2\omega^6/\left(15c^5\right)$.

4.43. $I = \frac{4e^2a^2h^2\omega^6}{15c^5}$, где $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{4mlh^2}}$ — частота малых колебаний маятника. $I_{2\omega} = \frac{8}{3}\frac{e^2a^4\omega^4}{c^3l^2}$. *Указание.* Рассмотреть колебания маятника под действием притяжения со стороны изображения.

4.44. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{e^2a^2\omega^6h^2}{2\pi c^5}\cos^2\theta\left(1+\cos^2\theta\right)$, $\overline{I} = \frac{8e^2a^2\omega^6h^2}{15c^5}$. *Указание.* Рассмотреть круговое движение заряда (и его изображения) как два колебания во взаимно перпендикулярных направлениях, сдвинутых по фазе на $\pi/2$.

4.45. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{p_0^2\omega^4}{2\pi c^3}\left(1-\sin^2\theta\cos^2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)$. Ось Z соединяет диполи (опережающий диполь расположен выше), моменты диполей направлены вдоль X. Сравнить с задачей 4.38, случай 4«б».

4.46. $l = \frac{(2m+1)\pi}{2k_z}$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$ и $k_z = \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/a)^2}$ — волновое число для волны H_{10}. $\alpha = \pi n - \frac{\pi}{2}$, где $n = 1, 2, \ldots$

4.47. $H \sim \frac{\sin(4\pi\cos\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\alpha\right)}$. Угол α отсчитывается от прямой, проходящей через все вибраторы. Основной лепесток диаграммы имеет угол раствора $\simeq 30^0$ и по амплитуде в $\gtrsim 5$ раз превышает остальные.

4.48. $\frac{\overline{dI}}{d\theta} = \frac{d^2\omega^4}{4c^3}\sin^3\theta\left[1+2\cos\left(2\pi\cos\theta\right)\right]^2$.

4.49. $I(\theta) \sim \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$.

4.50. $\frac{dI}{d\theta} \sim \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)\right]^2$, $\theta_{\max} = 0$.

4.52. Главные максимумы системы из двух решеток находятся в тех же направлениях, что и у одной решетки, но их амплитуда изменится в $4\cos^2\left(\pi a\cos\theta/\lambda\right)$ раз, где θ — угол между нормалью к решетке и направлением на главный максимум.

4.53. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{p_0^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta\left[\frac{\sin\left(\frac{N\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\varphi\right)}\right]^2$, ось Z направлена вдоль моментов диполей, которые расположены в плоскости XZ. Сравнить с задачей 4.47.

4.54. $\Delta\varphi = -\frac{2\pi d}{\lambda}\sin(\Omega t + \alpha) + 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, ...$, d — расстояние между двумя соседними вибраторами. При этом угол между нормалью к ряду вибраторов и направлением на главный лепесток диаграммы есть $\Omega t + \alpha$.

4.55. $H_\alpha = -\frac{2J_0}{cr}\sin\theta\frac{\sin[ka(1-\cos\theta)]}{1-\cos\theta}\exp\{-i(\omega t - kr)\}$.

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{J_0^2}{2\pi c}\frac{\sin^2\theta\sin^2[ka(1-\cos\theta)]}{(1-\cos\theta)^2},$$

$$\overline{I} = \frac{J_0^2}{c}\left[C - 1 + \frac{8\pi a}{\lambda} + \operatorname{sinc}\frac{8\pi a}{\lambda} - C_i\left(\frac{8\pi a}{\lambda}\right)\right],$$

где $C = 0,577$ — постоянная Эйлера, а $C_i(x)$ — интегральный косинус. *Указание*. Рассматривать каждый элемент антенны как диполь с моментом $\mathrm{d}p = q\mathrm{d}x$, где q — его заряд, равный $J(x)/i\omega$ ($J(x)$ — амплитуда тока в этом элементе антенны).

4.56. $H_\alpha = \frac{2iJe^{-i(\omega t - kr)}}{cr\sin\theta}f(\theta)$;

$$f(\theta) = \begin{cases} i\sin\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right) & \text{при } m \text{ четном,} \\ \cos\left(\frac{m\pi}{2}\cos\theta\right) & \text{при } m \text{ нечетном;} \end{cases}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{J_0^2 f^2(\theta)}{2\pi c\sin^2\theta};$$

$$\overline{I} = \frac{J_0^2}{2c}\left[\ln(2\pi m) + C - C_i(2\pi m)\right],$$

где C и C_i определены в предыдущей задаче. *Указание*. Применить тот же метод, что и в предыдущей задаче.

4.57. $\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi}{2}\frac{J_0^2 n^2\omega^2 a^2}{c}\cos^2 n\alpha \cdot \left[\frac{J_n\left(\frac{\omega a}{c}\sin\theta\right)}{\frac{\omega a}{c}\operatorname{tg}\theta}\right]^2$.

4.58. $R = \frac{2\pi^2 a^4\omega^4}{3c^5} \simeq 200\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4$ Ом.

4.59. $I(\theta) \sim \sin^2\left(\frac{\pi h\sin\theta}{\lambda}\right)$, где θ — широта точки наблюдения.

4.60. $\vec{H} = \frac{i\omega^3 p_0 a}{c^3 r}\left(\sin\alpha\cdot\vec{e}_\theta + \cos\alpha\cos\theta\cdot\vec{e}_\alpha\right)\cos\theta e^{i(\omega t - kr)}$. Проводящая плоскость совпадает с XY, момент диполя направлен вдоль оси X. $\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^6 p_0^2 a^2}{8\pi c^5}\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cos^2\theta\right)\cos^2\theta$. *Указание*. Рассмотреть поля излучения диполя и его изображения.

4.61. $\vec{H} = \frac{2i\omega^2 p_0}{c^2 r}\left[\sin\varphi\sin\alpha\vec{e}_\theta + (\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi)\sin\theta\vec{e}_\alpha\right]\sin\left(kh\cos\theta\right)$ (проводящая плоскость совпадает с XY, диполь лежит в плоскости ZX). При $\varphi = \pi/2$ получаем ответ предыдущей задачи. *Указание*. То же, что и в предыдущей задаче.

4.62. Не изменится.

4.63. $\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{9}{800\pi}\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}\sin^2\theta\cos^2\theta, \overline{I} = \frac{3}{500}\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}$.

4.64. $\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{9}{8\pi}\frac{e^2\omega^8 a^6}{256 c^7}\left(1 + \cos^2\theta\right)\sin^4\theta$.

4.65. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n \frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}\Omega}$; $S_n = 0$, когда n/N — не целое число и $S_n = N^2$ при n/N — целом. Здесь n — номер гармоники частоты обращения зарядов ω_0, а $\mathrm{d}I_n/\mathrm{d}\Omega$ — интенсивность излучения одного заряда на этой гармонике.

4.66. а) $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta$, где θ — угол между электрическим полем $\vec{E}$ падающей волны и направлением рассеяния;

б) и в) $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\left[\vec{A}\times\vec{n}\right]^2 + \left[\vec{B}\times\vec{n}\right]^2}{A^2 + B^2}$, где $\vec{E}$ — поле падающей волны, взятое в виде $\vec{E} = \vec{A}\cos(\omega t + \alpha) + \vec{B}\sin(\omega t + \alpha)$, а векторы $\vec{A}$ и $\vec{B}$ ортогональны. Случай $\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right|$ описывает рассеяние волны, поляризованной по кругу.

4.67. $\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$, где $\gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$ — фактор, учитывающий силу лучистого трения, взятую в виде $\vec{F}_{\text{тр}} = -m\gamma\dot{\vec{r}}$.

4.68. $f_{\text{тр}} = \frac{16}{3}\sigma_0\sigma\beta\gamma^2 T^4$, где σ — полное эффективное сечение рассеяния, σ_0 — постоянная Стефана—Больцмана. *Указание*. На

электрон действует тормозящая сила со стороны равновесного излучения с температурой T, находящегося в ящике.

4.69. $\frac{d\sigma}{d\Omega} = (\alpha+\beta)^2\left(\frac{\omega}{c}\right)^4\sin^2\theta$, где θ — угол между электрическим полем падающей волны и направлением рассеяния.

4.70. $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta\cos^2(kd\cos\theta)$, где θ — тот же угол, что и в предыдущей задаче. При $d \ll \lambda$ сечение в 4 раза больше, чем для одного заряда; при $\frac{d}{\lambda} \gg \frac{\lambda/\Delta\lambda}{\cos\theta}$ рассеяние некогерентно и сечение вдвое больше, чем для одного заряда.

4.71. $I_{\parallel}/I_{\perp} = 4$. В продольном направлении поляризация круговая, а в поперечном — линейная.

4.72. $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 4\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)$.

4.73. $\frac{d\sigma}{d\varphi} = 16\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\varphi\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\varphi\right)$. Излучение максимально при $\varphi = 0, \pi$.

4.74. а) $\frac{d\sigma_1}{d\Omega} = 4\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\sin^2\theta\right)\times$
$\times\cos^2\left(\frac{ka}{2}\cos\theta\right)$ для волны с вектором $\vec{E}$, перпендикулярным плоскости, проходящей через ось молекулы, и вектором $\vec{n} = \vec{k}/k$.
$\frac{d\sigma_1}{d\Omega} = 4\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^2\left[\cos^2\psi\sin^2\alpha+\sin^2\theta(\cos\alpha\cos\psi-\sin\psi)^2\right]\times$
$\times\cos^2\left(\frac{ka}{2}\cos\theta\right)$ для волны с $\vec{E}$, лежащим в вышеуказанной плоскости, так что ψ — угол между $\vec{n}$ и осью молекулы. $\sigma_N = N\sigma_1$;

б) $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 2N\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\sin^2\theta$.

4.75. $E_\omega(\theta) \sim E_0\,\mathrm{sinc}\,\frac{(\omega-\omega_0)\tau}{2}\cos\frac{kl(1-\cos\theta)}{2}$.

4.76. $P_{3\omega} = \frac{27}{4}\frac{\alpha a^3E_0^3}{(\varepsilon_0+2)^4}$; $\sigma_{3\omega} = \frac{3^9\pi\alpha^2\omega^4a^6E_0^4}{2c^4(\varepsilon_0+2)^8}$.

4.77. $I_{2\omega} = \frac{7}{20}\frac{e^6E_0^4}{m^4c^5\omega^2}$ при $E \ll \frac{mc\omega}{e}$.

4.78. а) $\sigma = \frac{16}{3}\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2$ для $\omega_0 \gg \omega$;

б) $\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4$ для $\omega_0 \ll \omega$, где $\omega^2 = \frac{e^2}{4mR^3}$ — собственная частота системы зарядов.

4.79. $\frac{\mathrm{d}\varkappa_{\vec{n}}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2}{9}\frac{e_1 e_2}{c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_0.$

4.80. $\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{(1+\beta)^2}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^6}\left[(1-\beta\cos\theta)^2 - \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\theta\cos^2\alpha\right];$

$$\lambda_{\text{расс}} \simeq \frac{\lambda_0/\gamma^2}{(1+\beta)^2} \simeq 4\cdot 10^{-16}\ \text{см}.$$

4.81. $F_N = W(1+R)\cos^2\theta$, где W — плотность энергии волны, θ — угол падения.

4.82. $p = I\left\{\gamma^2\left[\left(1+\beta^2\right)\cos\alpha + 2\beta\right] + \cos\alpha\right\}.$

4.83. $W = \frac{S}{c}\left[1 + \frac{4R\sin^2\psi}{\left(1-R^2\right)^2 + 4R^2\sin^2\psi}\right], R = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2, \ \ \psi = \frac{2\pi nd}{\lambda}.$

4.84. $F = \pi a^2 RW \simeq 2\cdot 10^{-4}$ дин. Здесь $W = \frac{I}{c}$ — плотность энергии падающей волны.

4.85. $F = I_0\frac{a^4}{8cx^3}(x - 2F_0)$.

4.86. $a \lesssim \frac{3}{4}\frac{S_a R^2}{\gamma M_\odot \rho c}$, где S_a — солнечная постоянная у поверхности Земли (2 кал/см^{2}мин), R — расстояние от Земли до Солнца ($1,5\cdot 10^8$ км), $M_\odot$ — масса Солнца ($2\cdot 10^{30}$ кг), ρ — плотность пылинки (~ 5 г/см^3), γ — гравитационная постоянная. $a \lesssim 10^{-5}$ см. Как изменится результат с учетом дифракции $(a \sim \lambda)$?

4.87. $p = \frac{4}{3}\frac{\sigma T^4}{c} \simeq 5\cdot 10^{11}$ атм.

5. ИЗЛУЧЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ

5.1. $\Lambda^i_{\cdot k} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5.2. $A^0 = \gamma\left(A'^0 + \beta A'^1\right)$, $A^1 = \gamma\left(\beta A'^0 + A'^1\right)$, $A^2 = A'^2$, $A^3 = A'^3$, где A^i — любой из данных векторов.

5.4. а) $\varphi = \frac{e}{R^*}$, $\vec{A} = \frac{e\vec{\beta}}{R^*}$;
б) $\vec{E} = \frac{e\vec{R}^*}{\gamma^2 R^{*3}}$, $\vec{H} = \left[\vec{\beta} \times \vec{E}\right]$, $R^{*2} = \left(x - vt^2\right) + \frac{y^2+z^2}{\gamma^2}$.

5.5. а) $\omega = \frac{1-\beta}{1+\beta}\omega_0$. б) $\cos\theta'' = \frac{\left(1+\beta^2\right)\cos\theta - 2\beta}{1+\beta^2 - 2\beta\cos\theta}$.

5.6. $\vec{A} = \gamma\left(\vec{A}' + \vec{\beta}A_0'\right) + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\left[\left[\vec{A}' \times \vec{\beta}\right] \times \vec{\beta}\right]$,

$$A_0 = \gamma\left(A_0' + \vec{\beta}\vec{A}'\right).$$

5.7. а) На скаляр, два вектора и тензор второго ранга в 3-мерном пространстве.

5.8.

$$F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -H_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

5.10. $\vec{E} = \gamma\left(\vec{E}' - \left[\vec{\beta} \times \vec{H}'\right]\right) - (\gamma - 1)\frac{\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\vec{E}'\right)}{\beta^2}$,

$$\vec{H} = \gamma\left(\vec{H}' + \left[\vec{\beta} \times \vec{E}'\right]\right) - (\gamma - 1)\frac{\vec{\beta}\left(\vec{\beta}\vec{H}'\right)}{\beta^2}.$$

5.11. $F_{ik}F^{ik} = 2\left(H^2 - E^2\right)$.

5.13. $\vec{v} = c\frac{\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]}{H^2}$ при $\left|\vec{E}\right| < \left|\vec{H}\right|$. Что будет при $\left|\vec{E}\right| > \left|\vec{H}\right|$?

5.14. $\vec{\beta} = \left[\vec{E} \times \vec{H}\right]\frac{E^2+H^2-A}{2\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]^2}$. При этом

$E'^2 = \frac{1}{2}\left(E^2 - H^2 + A\right)$ и $H'^2 = \frac{1}{2}\left(H^2 - E^2 + A\right)$,

где

$$A = \sqrt{\left(E^2 - H^2\right)^2 + 4\left(\vec{E}\vec{H}\right)^2}.$$

Единственно ли это решение?

5.15. Для $\left|\vec{E}\right| > \left|\vec{H}\right|$ $\vec{v} = c\frac{\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]}{E^2}$ при $\vec{v}\perp\vec{E}$ и $v = \frac{cH}{E\sin\alpha}$, если $\vec{v}\perp\vec{H}$ и составляет с $\vec{E}$ угол α $(H/E \leqslant \sin\alpha \leqslant 1)$. Для $\left|\vec{E}\right| < \left|\vec{H}\right|$ $\vec{v} = c\frac{\left[\vec{H}\times\vec{E}\right]}{H^2}$ при $\vec{v}\perp\vec{H}$ и $v = \frac{cE}{H\sin\alpha}$, если $\vec{v}\perp\vec{E}$ и составляет с $\vec{H}$ угол α $(E/H \leqslant \sin\alpha \leqslant 1)$.

5.16. $v = \frac{c\left(\gamma_+^2 - \gamma_-^2\right)}{4\gamma_+^2\gamma_-^2} \simeq 0,17$ см/с, где $\gamma_- = \frac{T_{e^-}}{mc^2} = 2\cdot 10^5$,

$$\gamma_+ = \frac{T_{e^+}}{mc^2} = 6\cdot 10^5.$$

5.17. Для $E > H$ $(\varkappa > J/c)$ $H' = 0$, $E' = \frac{2\varkappa}{r}\sqrt{1 - (J/c\varkappa)^2}$ при движении вдоль оси цилиндра со скоростью $v = J/\varkappa$.

Для $E < H$, $E' = 0$, $H' = \frac{2J}{cr}\sqrt{1 - (c\varkappa/J)^2}$, $v = \varkappa c^2/J$.

5.19. $\varphi = \frac{\vec{d}\vec{r^*}}{\gamma r^{*3}}$, $\vec{A} = \vec{\beta}\varphi$, $\vec{E} = \frac{3\vec{R}\left(\vec{d}\vec{r^*}\right) - \vec{d}r^{*2}}{\gamma^2 r^{*5}}$, $\vec{H} = \left[\vec{\beta}\times\vec{E}\right]$, где $\vec{R} = (x - vt,\ y,\ z)$, $\vec{r^*} = (x - vt,\ y/\gamma,\ z/\gamma)$. Диполь предполагается движущимся вдоль оси X и находящимся в момент t в точке с радиус-вектором $\vec{v}t$.

5.20. $F = \sigma\gamma^2 H_0^2\frac{a^6}{l^4}\beta^2\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2$.

5.21. $\vec{E}_{\text{внутр}} = 0$, $\rho_{\text{инд}} = 0$, $\vec{E}_{\text{нар}} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{p}}{r^3} + \frac{3(\vec{p}\vec{r})\vec{r}}{r^5}$, $\vec{E}_0 = (0, 0, \gamma\beta H_0\sin\theta)$, $\vec{p} = \vec{E}_0 R^3$, $\sigma_{\text{инд}} = \frac{3}{4\pi}E_0\cos\theta'$.

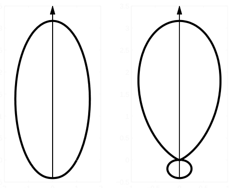
5.23. а) $\tau = \frac{d}{c}\left(\frac{1}{\beta} - \cos\theta\right)$; б) $\lambda \simeq c\tau$; в) $\lambda \simeq 5260\,\mathring{A}$.

5.26. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3(1-\beta\cos\theta)^6}$, где θ — угол между $\vec{v}$ и $\vec{n}$ (направлением излучения). $I = \frac{2}{3}\frac{e^2\dot{v}^2}{c^3}\frac{1+\beta^2/5}{\left(1-\beta^2\right)^4}$. Полная скорость потери энергии равна

$-\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = \frac{2}{3}\frac{\mathcal{E}^2\dot{v}^2}{c^3\left(1-\beta^2\right)^3}$. *Указание*. При вычислении $-\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t'$ учесть, что $\mathrm{d}t/\mathrm{d}t' = 1 - \beta\cos\theta$.

5.27. Если $\vec{v}$ направлена вдоль оси Z, а $\dot{\vec{v}}$ — вдоль оси X, то

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{(1-\beta\cos\theta)^2\,\dot{v}^2 - \left(1-\beta^2\right)\dot{v}^2\sin^2\theta\cos^2\alpha}{(1-\beta\cos\theta)^6}.$$



Диаграммы направленности в плоскостях YZ и XZ показаны на рисунке. Отношение интенсивностей излучения вперед-назад равно $\left[(1+\beta)\,/\,(1-\beta)\right]^4 \simeq 2^8\gamma^8$.

5.28. а) $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{cE^2}{\gamma^6}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}$, где θ — угол между $\vec{E}$ и $\vec{n}$; $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\vec{n}\omega}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{cE^2}{\gamma^6}\frac{\sin^2\left(\omega' d/2\beta c\right)}{\pi^2\omega'^2}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^6}d\omega$, где $\omega' = \omega\left(1-\vec{n}\vec{\beta}\right)$;

б) $\Delta\mathcal{E} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{E^2 d}{\beta}$;

в) $\Delta p = \frac{eEd}{c}\left[1 - \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{E/e}{\beta}\right]$. *Указание*. Для вычисления углового спектрального распределения найти Фурье-компоненту ускорения $\dot{\vec{v}}_{\omega'} = \frac{1}{2\pi}\int\dot{\vec{v}}e^{i\omega t}\mathrm{d}t$.

5.29. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\frac{e^2\left(E^2-H^2\right)}{m^2c^3}$.

5.30. а) $I = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^3\left(1-\beta^2\right)} = \frac{2}{3}c\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 H_\perp^2\left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2}\right)^2$.

5.31. $\gamma \simeq \sqrt{2\pi\frac{mc^2}{eH\lambda}} \simeq 100$, $\mathcal{E} \simeq 50$ МэВ.

5.32. $\gamma \simeq \left(\frac{E_\gamma R}{\hbar c}\right)^{1/3} \simeq 2400$, $\mathcal{E} \simeq 1{,}2$ Гэв.

5.33. а) $\mathcal{E}(t) = mc^2\,\mathrm{cth}\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t + \frac{1}{2}\ln\frac{\mathcal{E}_0+mc^2}{\mathcal{E}_0-mc^2}\right)$;

б) $r(t) = \frac{1}{eH}\sqrt{\left(\mathcal{E}(t)\right)^2 - m^2c^4}$.

5.34. $\Delta\mathcal{E}_{e-} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{mc^2}\gamma^3\beta eH\theta$, $\Delta\mathcal{E}_{e+} = \frac{4}{3}\frac{e^2}{mc^2}\gamma^3\beta eH(\pi-\theta)$.

5.35. $\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4H^2\left(1-\beta^2\right)}{8\pi m^2c^3}\frac{1+\cos^2\theta-\frac{1}{4}\beta^2\left(1+3\beta^2\right)\sin^4\theta}{\left(1-\beta^2\sin^2\theta\right)^{7/2}}$. Отсюда видно, что излучение лежит вблизи плоскости орбиты в угле $1/\gamma$. *Указание.* Воспользоваться результатами задачи 5.27 и учесть указание к задаче 5.26.

5.36. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0\left(1+\frac{128\mathcal{E}_0^3}{e^2m^2c^3}t\right)^{-1/3}$, $r(t) = r_0\left[1-2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{ct}{r_0^3}\right]^{1/3}$.

5.37. $l \lesssim R/\gamma^3, h \lesssim R/\gamma^2$, где l — расстояние между электронами вдоль орбиты, а R — ее радиус. $R = \mathcal{E}/0,3H = 10^2$ см, $l \lesssim 50\,\mathring{A}$, $h \lesssim 3$ мм. Для $h_1 = 5$ мм $I_\Sigma \simeq 4I_0$, для $h_2 = 3$ мм $I_\Sigma \simeq 2I_0$, где I_0 — мощность излучения отдельного электрона на такой орбите:

$I_0 = \frac{2}{3}c\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\gamma^2H^2 \simeq 3,5\cdot10^{10}$ эВ/с.

5.38. Угол поворота $\theta = \frac{4}{3}\frac{e^3H_0v^2}{m^2c^6\left(1-\beta^2\right)}$. Полное смещение вдоль X: $\Delta x \simeq \frac{e^2}{mc^2}\beta^3\gamma^3 \approx \frac{e^2}{mc^2}\gamma^3$. *Указание.* Учесть, что скорость потерь энергии на излучение $\mathrm{d}\mathcal{E}/\mathrm{d}t$ постоянна: $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{v^2H^2\gamma^2}{c}$.

5.39. $\Delta x \simeq \frac{2}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\gamma^2\frac{Hl}{e} \simeq 5\cdot10^{-4}$ см.

5.40. Магнитный момент электрона в его собственной системе координат $\vec{\mu} = g\vec{M}$, где $M = \frac{\hbar}{2}$, $g = 2.02\frac{e}{2mc}$. Частота прецессии $\Omega = gH' = g\gamma H$. Интенсивность магнитодипольного излучения $I = \frac{2\gamma^4g^4H^4}{3c^3}\mu \approx \frac{\mu\gamma H}{\tau'}$. Используя выражение для скорости вращения электрона в магнитном поле $\frac{eH}{mc\gamma}R = v \approx c$, получаем $\tau = 3\frac{m^5c^8}{e^5\hbar\gamma^2H^3} = 3\frac{m/\hbar R^3}{e^2/mc^2\gamma^5} = 5\cdot10^3$ с.

5.41. а) $\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{12}\frac{Z^2e^2\left(e^2/mc^2\right)^2}{\rho^3\beta}\frac{4-\beta^2}{1-\beta^2}$; в нерелятивистском пределе $(\beta \ll 1)$ $\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{3}\frac{Z^2e^6}{m^2c^3\rho^3v}$;

б) $\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{e^2}{mc2}\right)^2\frac{g^2\gamma^2v}{c\rho^3}$; в нерелятивистском пределе $(\gamma \simeq 1)$;

в) $\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{8}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\gamma^2 p^2}{\beta\rho^5}\left(7 - \frac{15}{8}\beta^2\right)$ при $\gamma \simeq 1$ $\Delta\mathcal{E} = \frac{7}{8}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{p^2 c}{v\rho^5}$;

г) $\Delta\mathcal{E} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{J^2\gamma^2\beta}{c^2\rho}$.

Во всех случаях отклонение на заметный угол возможно лишь при $\rho \sim \mathcal{E}/mc^2$, где $\mathcal{E}$ — энергия взаимодействия частицы с «рассеивателем».

5.42. $\Delta\mathcal{E} = \frac{8\pi}{3}\frac{e^4\varkappa^2\gamma^2}{m^2c^3\rho}\left[1 + \frac{\beta^2}{2}\left(\frac{J^2}{c^2\varkappa^2} - 1\right)\right]$.

5.43. $\overline{\frac{d\mathcal{E}}{dt'}} = \frac{1}{3}\frac{(\alpha\gamma\beta H_0)^2}{c^3}\left(\frac{2\pi\gamma\beta c}{L}\right)^4$, $\omega_{\max} \simeq \frac{4\pi\gamma^2\beta c}{L}$, поляризация излучения атома — линейная.

5.44. $\mathcal{E}_{\text{кр}} = mc^2\left(\frac{2}{3}\frac{\omega}{e^2/mc}\right)^{1/3}$.

5.45. $d \sim R/\gamma^2 \simeq 3 \cdot 10^{-4}$ см.

5.46. Можно. *Указание*. Учесть, что глаз регистрирует лишь определенную часть спектра синхротронного излучения позитрона.

5.47. $\frac{d\mathcal{E}\omega}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right)$. При $\beta \ll 1$ $\frac{d\mathcal{E}\omega}{d\omega} = \frac{2}{3}\frac{e^2}{\pi c}\beta^2$. Указание: учесть, что вследствие «мгновенности» испускания основная доля излучения лежит в области малых частот (длинноволновая часть спектра).

5.48. а) $\frac{d\mathcal{E}\omega}{d\omega} = \frac{8}{3}\frac{e^2v^2\sin^2\theta}{\pi c^3}$; б) $\frac{d\mathcal{E}\omega}{d\omega} = \frac{8}{3}\frac{e^2v^2\rho^2}{\pi c^3 R^2}$.

5.49. а) $\frac{d\mathcal{E}\omega/d\omega}{d\Omega} = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}$. *Указание*. Учесть, что вследствие «мгновенности» исчезновения частицы и ее изображения при попадании на проводящую плоскость основная доля излучения является длинноволновой;

б) $\frac{d\mathcal{E}\omega/d\omega}{d\Omega} = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{(\varepsilon-1)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)^2}$.

5.50. а) $\frac{dI\omega}{d\omega} = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}$, $I_\omega = \frac{4e^2\beta^2}{3\pi c}\left(\frac{3}{8}\frac{\beta^2+1}{\beta^3}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{3}{4\beta^2}\right)$,

$I_\omega \simeq \frac{2e^2}{\pi c}\ln\frac{\mathcal{E}}{mc^2}$ при $\mathcal{E} \gg mc^2$; $I_\omega \simeq \frac{4}{3}\frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}$ при $\beta \ll 1$;

б) $\Delta\mathcal{E} \simeq \frac{e^2}{a}$.

5.51. $\Delta\mathcal{E} = \frac{\pi}{24}\frac{e^6 C_0^2}{m^2 c^3 v R^5}$.

5.52. $\tau = \frac{l}{v}\,\mathrm{tg}^2\,\theta$, $I = W_{\text{вч}} v \mathrm{ctg}^2\theta$, где $\cos\theta = c/nv$, а $W_{\text{вч}}$ — полная энергия черенковского излучения на единицу длины траектории

$$\left(W_{\text{вч}} = \int_{\beta n(\omega)>1} \frac{e^2\omega}{c^2}\left[1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right]\omega d\omega\right).$$

5.56. *Указание*. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

Библиографический список

Власов А. А. Макроскопическая электродинамика. М.: Гостехиздат, 1955.

Горелик Г. С. Колебания и волны. М.: Физматгиз, 1959.

Гудмен Дж. Взведение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970.

Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.

Зоммерфельд А. Электродинамика. М.: Иностр. лит., 1958; Оптика. М.: Иностр. лит.,1953.

Калитиевский Н. И. Волновая оптика. М.: Наука, 1971.

Компанеец А. С. Теоретическая физика. М.: Гостехиздат, 1957.

Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М.: Наука, 1973; **Электродинамика** сплошных сред. М.: Наука, 1982.

Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. М.: Наука, 1972.

Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. М.: Высш. шк., 1983; Оптика. М.: Высш. шк., 1985.

Мешков И. Н., Чириков Б. В. Электромагнитное поле. М.: Наука, 1987.

Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. М.: Физматгиз, 1963.

Берклеевский курс физики. М.: Наука, 1971—1974. Т. 2: Парсел Э. Электричество и магнетизм. М.: Наука, 1971; Т. 3: Крауфорд Ф. Волны. М.: Наука, 1974.

Сивухин Д. В. Общий курс физики. М.: Наука, 1977. Т. 3: Электричество.

Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: Иностр. лит., 1954.

Сороко Л. М. Основы голографии и когерентной оптики. М.: Наука, 1971.

Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.: Гостехиздат, 1948.

Тамм И. Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1966.

Фейнман Р. и др. Фейнмановские лекции по физике / Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс. М.: Мир, 1966. Вып. 5, 6.

Франсон М. Голография. М.: Мир, 1972.

Харкевич А. А. Спектры и анализ. М.: Гостехиздат, 1937.

Батыгин В. В., Топтыгин И. Н. Сборник задач по электродинамике. М.: Наука, 1970.

Векштейн Е. Г. Сборник задач по электродинамике. М.: Высш. шк., 1966.

Сборник задач по теоретической физике / Л. Г. Гречко, В. И. Сугаков, О. Ф. Томасевич, А. М. Федорченко. М.: Высш. шк. 1972.

Кронин Дж. и др. Сборник задач по физике с решениями / Дж. Кронин , Д. Гринберг , В. Телегди. М.: Атомиздат, 1971.

Меледин Г. В. Физика в задачах. Экзаменационные задачи с решениями. М.: Наука, 1985.

Меледин Г. В., Эйдельман Ю. И. Электродинамика в задачах: Учебное пособие/ НГУ, Новосибирск, 1997.

Сборник задач по общему курсу физики. М.: Наука, 1977.

Ч. 3. Стрелков С. П. и др. Электричество и магнетизм / С. П. Стрелков, Д. В. Сивухин, С. Э. Хайкин, И. А. Яковлев.

Ч.4. Гинзбург В. Л. и др. Оптика / В. Л. Гинзбург, Л. М. Левин, Д. В. Сивухин.

Руссо М., Матье Ж. П. Задачи по оптике. М.: Мир, 1976.

Генрий Викторович Меледин
Валерий Семенович Черкасский

Задачи по электродинамике
Учебное пособие

Подписано в печать | Формат $60 \times 84/16$
Офсетная печать. | Уч.-изд. л. 5.5
Заказ ь | Тираж 250 экз. | Цена

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета;
участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск-90,
ул. Пирогова, 2.